

Landau 定理在高维复射影空间的推广

王 晗, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用到复射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的全纯映射的正规性和值分布理论, 结合 Zalcman 引理, 对单位圆盘到高维复射影空间中全纯曲线的 Landau 定理进行了研究, 得到了如下结果: 设 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线, $D_1, D_2, \dots, D_{2t+1}$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 $2t+1$ 个超曲面且位于 t -次一般位置。若对于每一个 $j = 1, 2, \dots, 2t+1$, $f(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 则存在绝对常数 M 使得 $(1-|z|^2)f^\#(z) \leq M$, $z \in \Delta$, 且 $T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$ 。

关键词: Landau 定理; 全纯曲线; 超曲面

中图分类号: O 174.56 **文献标志码:** A

Higher dimensional complex projective space generalization of the Landau theorem

WANG Han, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the theories of normal family and value distribution for holomorphic mappings into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, the n -dimensional complex projective space, combined with the Zalcman lemma, Landau theorem for holomorphic curves from the unit disk to higher dimensional complex projective space was discussed. Following results can be obtained. Let f be a holomorphic curve of Δ into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, and let $D_1, D_2, \dots, D_{2t+1}$ be $2t+1$ hypersurfaces in t -subgeneral position in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. If for each $j = 1, 2, \dots, 2t+1$, $f(\mathbb{C})$ does not take D_j , then absolute constant M exists, such that $(1-|z|^2)f^\# \leq M$, $z \in \Delta$, and $T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$.

Keywords: Landau theorem; holomorphic curves; hypersurface

1 问题的提出

常数 A 和 B 使得

$$\frac{|f'(a)|}{|f(a)|(|\log |f(a)|| + A)} \leq \frac{2}{r} \quad (1)$$

设 $f: D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 且对于所有 $z \in D(a, r)$, $f(z) \neq 0$ 且 $f(z) \neq 1$. Landau 定理^[1]断言: 存在绝对 且

收稿日期: 2021-02-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871216)

第一作者: 王 晗 (1997-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: 1356938164@qq.com

通信作者: 刘晓俊 (1982-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu@hotmail.com

$$f^\#(a) \leq \frac{B}{r} \tag{2}$$

式(1)中常数 A 被称为 Landau 常数。曾经有许多数学家致力于估计此常数 A , 1947 年 Hayman^[2] 最早得出 A 的估计值, 证得 $A \leq 5\pi$. Jenkins^[3-4] 采用和 Schottky 定理类似的方法在 1955 和 1956 年分别推出 $A \leq 7.77$ 和 $A \leq 5.94$. 1960 年, Lai^[5] 对文献 [3-4] 中 Jenkins 的方法稍加改进, 得到 $A \leq \frac{3}{2} \log 24 = 4.76 \cdots$. 在 20 世纪 70 年代末, 首先由 Lai^[6] 给出了 A 的精确估值:

$$A = \frac{\Gamma(1/4)^4}{4\pi^2} = 4.376\,879\,6 \cdots$$

Hempel^[7] 和 Jenkins^[8] 先后彼此独立地得到了相同的结果, 他们所用的证明方法各有不同。尽管如此, Landau 定理的显示估计形式仍有改进的空间。

近年来, Cherry 等^[9] 建立了单位圆盘到高维复射影空间中全纯曲线的 Landau 定理, 得到定理 1。

定理 1 设 $H_0, \cdots, H_{2n}$ 为 $\mathbb{P}^n$ 上 $2n+1$ 个位于一般位置的超平面, 设

$$G = \max_{0 \leq j_0 < \cdots < j_n \leq 2n} \max \left\{ \log \Lambda(H_{j_0}, H_{j_1}, \cdots, H_{j_n}), \right. \\ \left. \log(n+1) - \log \lambda(H_{j_0}, H_{j_1}, \cdots, H_{j_n}) \right\}$$

且

$$G^\# = \min_{0 \leq j_0 < \cdots < j_n \leq 2n} \frac{1}{\lambda^\#(H_{j_0}, H_{j_1}, \cdots, H_{j_n})}$$

设 B^* 为二项式系数,

$$B^* = \binom{2n+1}{n+1}$$

且 $K = 12.672(2.6 \times 10^7 \log B^* + 10^8)^{6(4 + \log B^* + 20)} G G^\#$. 若设 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线且不取 $H_0, H_1, \cdots, H_{2n}$, 则对于 $|z| < 1$, 有

$$f^\#(z) \leq \frac{K}{1 - |z|^2}$$

受定理 1 的启发, 本文研究上述问题。若将条件改为: 设 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线, $D_1, D_2, \cdots, D_{2t+1}$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 $2t+1$ 个位于 t -次一般位置的超曲面, 结合 Zalcman 引理^[10-11] 得到类似的结果。

定理 2 设 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线, $D_1, D_2, \cdots, D_{2t+1}$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 $2t+1$ 个超曲面且位于 t -次一般位置。若对于每一个 $j = 1, 2, \cdots, 2t+1$, $f(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 则存在绝对常数 M 使得

$$(1 - |z|^2) f^\#(z) \leq M, \quad z \in \Delta$$

且

$$T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$$

由此可得推论 1。

推论 1 设 $f: D(a, r) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线, $D_1, D_2, \cdots, D_{2t+1}$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 $2t+1$ 个超曲面且位于 t -次一般位置。若对于每一个 $j = 1, 2, \cdots, 2t+1$, $f(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 则存在绝对常数 M 使得

$$f^\#(a) \leq \frac{M}{r^2}$$

本文给出主要定理证明之前, 先介绍一些符号。 $D(a, r)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的区域, 表示以 a 为圆心、 r 为半径的圆盘。 $D(0, 1)$ 是单位圆盘, 记作 Δ 。其中, $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ 在 D 上表示序列 $\{f_n\}$ 按照 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的富比尼-施图迪 (Fubini-Study) 度量在 D 上内闭一致收敛于 f 。对于定义在 D 内的全纯映射 $f(z)$, f 在点 z 的球面导数记作 $f^\#(z) = \frac{|f \wedge f'|}{\|f\|^2}$ 。

2 定义及符号

首先介绍一些关于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的符号。 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \sim n$ 维复射影空间, 且对于任意的

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ 当且仅当存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$, 使得 $(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \lambda(y_0, y_1, \cdots, y_n)$. $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的等价类记作 $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$, 则

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] : \mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

记 $\mathbb{C}[x_0, x_1, \cdots, x_n]_d$ 为 d 次齐次多项式的集合, 其中, $d = 0, 1, 2, \cdots$ 。

定义 1^[12] 设 $D \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \cdots, x_n]_d$ 是一个 d 次齐次多项式, 根据 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的元素的定义, D 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的零点集有意义, 即

$$\{[z] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}); D(z_0, z_1, \cdots, z_n) = 0\}$$

称之为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中由 D 生成的一个 d 次超曲面。特别地, 一次超曲面是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个超平面。

定义 2^[12] 设 $M \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是一个非空闭子集, t 是一个正整数, $D_1, D_2, \cdots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 $q(8 > t+1)$ 个超曲面, 称它们关于 M 处于 t -次一般位置, 若对于任意 $\{i_0, i_1, \cdots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \cdots, q\}$, 有

$$M \cap \left(\bigcap_{j=i_0}^{i_t} D_j \right) = \emptyset$$

特别地, $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 时, 即超曲面关于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 处于 t -次一般位置也简称为处于 t -次一般位置。关于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 处于 n -次一般位置也简称为处于一般位置。

直观上说, 超曲面 $D_1, D_2, \dots, D_q$ 关于 M 处于 t -次一般位置是指, 对任意的一点 $p \in M$, 至多存在这些超曲面中的 t 个在此点相交。

有两种方法将 Nevanlinna 理论推广至全纯曲线上, 分别是 Cartan 利用对数导数引理的方法及 Ahlfors 的负曲率方法。

设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯曲线, $r > 0$, 定义 f 的 Cartan-特征函数 $T_f(r)$ 为

$$T_f(r) := \int_0^{2\pi} \log \left\| \mathbf{f}(re^{i\theta}) \right\| \frac{d\theta}{2\pi} - \log \|\mathbf{f}(0)\|$$

其中, $\mathbf{f}$ 是 f 的一个既约表示。

$$\|\mathbf{f}\| := (|f_0|^2 + \dots + |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

这个定义事实上与 f 的既约表示的选取无关。

定义 f 的 Ahlfors-特征函数 $T_f(r)$ 为

$$T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) := \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} f^* \omega_{\text{FS}}$$

其中, ω_{FS} 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的 Fubini-Study 度量的微分形式。这两种定义是统一的, 事实上由全纯映射的 Green-Jensen 公式, 有

$$\begin{aligned} T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) &= \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} \text{dd}^c \log \|\mathbf{f}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log \left\| \mathbf{f}(re^{i\theta}) \right\| \frac{d\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \log \|\mathbf{f}(0)\| = T_f(r) \end{aligned}$$

计算 Fubini-Study 度量形式在全纯曲线下的拉回, 则

$$\text{dd}^c \log \|f^2\| = (f^\#)^2 \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{d}z \wedge \text{d}\bar{z}$$

即

$$T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) := \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} (f^\#)^2 \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{d}z \wedge \text{d}\bar{z}$$

3 几个引理

众所周知, Zalcman 引理^[13-14]为正规族理论中一个非常重要的引理, 起着核心的作用。在给出主要定理的证明过程之前, 需要如下关于从 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的全纯映射的 Zalcman 引理(引理1)。

引理 1^[13-14] 设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\mathbb{C}$ 上区域 Ω 映到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的全纯映射, $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规当且仅当存在子列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 点列 $\{z_n\} \subset \Omega$, 且 $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, 正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n > 0$ 和 $\rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛于从 $\mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的非常值全纯映射 g 。

在主要定理的证明过程中, 需要 Picard 型定理(引理2)。

引理 2^[15] 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为一条全纯曲线, 其中, X 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的一个闭子集, $D_1, D_2, \dots, D_{2t+1}$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 $2t+1$ 个超曲面, 关于 X 处于 t -次一般位置, 若 $f(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 或者 $f(\mathbb{C}) \subseteq D_j, j = 1, 2, \dots, 2t+1$, 则 f 必为常映射。

4 定理的证明

4.1 定理 2 的证明

证明 倘若不然, 则存在 $z_n, |z_n| \in \Delta$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2) f^\#(z_n) = +\infty$$

令 $f_n(z) = f(z_n + (1 - |z_n|)z), z \in \Delta: |z| < 1$, 则

$$f_n^\#(z) = (1 - |z_n|) f^\#(z_n + (1 - |z_n|)z)$$

其中,

$$|z_n + (1 - |z_n|)z| \leq |z_n| + (1 - |z_n|)|z| < |z_n| + 1 - |z_n| = 1$$

则

$$\begin{aligned} f_n^\#(0) &= (1 - |z_n|) f^\#(z_n) = \\ &= \frac{(1 - |z_n|^2) f^\#(z_n)}{1 + |z_n|} > \frac{(1 - |z_n|^2) f^\#(z_n)}{2} \end{aligned}$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\#(0) = +\infty$, 所以, $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 处不正规。

由 Zalcman 引理可知, 存在点列 $z_n \in \Delta$, 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi) \Rightarrow g(\xi)$$

其中, $g(\xi)$ 是 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的非常数全纯曲线。

由于 $f(\mathbb{C})$ 不取 $D_j, j = 1, 2, \dots, 2t+1$, 故由 Hurwite 定理可得 $g(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 或 $g(\mathbb{C}) \subset D_j, j = 1, 2, \dots, 2t+1$ 。由引理2可知, g 必为常映射, 矛盾。定理2得证。

存在 $M > 0$, 使得

$$(1 - |z|^2) f^\#(z) \leq M$$

则

$$f^\#(z) \leq \frac{M}{(1 - |z|^2)} \tag{3}$$

由定义可知,

$$T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} (f^\#)^2 \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{d}z \wedge \text{d}\bar{z} \tag{4}$$

结合式(3)和式(4), 则

$$T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) \leq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z| < t} \frac{M^2}{(1-|z|^2)^2} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dz \wedge d\bar{z}$$

引进极坐标 $z = re^{i\theta}$ 后, 得到

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dz \wedge d\bar{z} = 2rdr \wedge \frac{d\theta}{2\pi}$$

则

$$\begin{aligned} T_{f, \omega_{\text{FS}}}(r) &\leq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|z| < t} \frac{M^2}{(1-|z|^2)^2} 2rdr \wedge \frac{d\theta}{2\pi} = \\ &\int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^t \frac{2rM^2}{(1-|r|^2)^2} dr = \\ &M^2 \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1-t^2} - 1 \right) \frac{d\theta}{2\pi} = \\ &M^2 \int_0^r \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{M^2}{2} \log(1-r^2) = \\ &\frac{M^2}{2} \log \frac{1}{1-r} - \frac{M^2}{2} \log(1+r) \end{aligned}$$

由定理 2 的条件可知, $0 < r < 1$, 因此, 得到 $T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$

4.2 推论 1 的证明

只要证明存在 $M > 0$, 使得 $(r^2 - |z|^2)f^\#(z+a) \leq M$ 。

倘若不然, 则存在 $z_n, |z_n| < r$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r^2 - |z_n|^2)f^\#(z_n+a) = +\infty$$

令 $f_n(z) = f(z_n + a + (r - |z_n|)z)$, $|z| < 1$, 其中,

$$|z_n + a + (r - |z_n|)z - a| = |z_n + (r - |z_n|)z| \leq$$

$$|z_n| + (r - |z_n|)|z| < |z_n| + r - |z_n| = r$$

$$f_n^\#(z) = (r - |z_n|)f^\#(z_n + a + (r - |z_n|)z)$$

所以,

$$f_n^\#(0) = \frac{(r^2 - |z_n|^2)f^\#(z_n+a)}{r + |z_n|} > \frac{(r^2 - |z_n|^2)f^\#(z_n+a)}{2r}$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\#(0) = +\infty$, 所以, $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规。

由 Zalcman 引理可知, 存在点列 $z_n \in D$, 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi) \Rightarrow g(\xi)$$

其中, $g(\xi)$ 是 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的非常数全纯曲线。

由于 $f(\mathbb{C})$ 不取 $D_j, j = 1, 2, \dots, 2t+1$, 故由 Hurwite 定理可得, $g(\mathbb{C})$ 不取 D_j , 或 $g(\mathbb{C}) \subset D_j, j = 1, 2, \dots, 2t+1$ 。由引理 2 可知, g 必为常映射, 矛盾。故

$$(r^2 - |z|^2)f^\#(z+a) \leq M$$

$$\text{令 } z=0, \text{ 则 } f^\#(a) \leq \frac{A}{r^2}.$$

参考文献:

- [1] HAYMAN W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] HAYMAN W K. Some remarks on Schottky's theorem[J]. [Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society](#), 1947, 43(4): 442–454.
- [3] JENKINS J A. On explicit bounds in Schottky's theorem[J]. [Canadian Journal of Mathematics](#), 1955, 7: 76–82.
- [4] JENKINS J A. On explicit bounds in Landau's theorem[J]. [Canadian Journal of Mathematics](#), 1956, 8: 423–425.
- [5] LAI W T. Ober den satz von landau[J]. [Sci Record](#), 1960, 4: 339–342.
- [6] LAI W T. The exact value of Hayman's constant in Landau's theorem[J]. [Sci Sinica](#), 1979, 22(2): 129.
- [7] HEMPEL J A. The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky[J]. [Journal of the London Mathematical Society](#), 1979, 20(3): 435–445.
- [8] JENKINS J A. On explicit bounds in Landau's theorem. II[J]. [Canadian Journal of Mathematics](#), 1981, 33(3): 559–562.
- [9] CHERRY W, EREMENKO A. Landau's theorem for holomorphic curves in projective space and the Kobayashi metric on hyperplane complements[J]. [Pure and Applied Mathematics Quarterly](#), 2001, 7(1): 199–221.
- [10] THAI D D, TRANG P N T, HUONG P D. Families of normal maps in several complex variables and hyperbolicity of complex spaces[J]. [Complex Variables, Theory and Application: An International Journal](#), 2003, 48(6): 469–482.
- [11] YANG L, FANG C Y, PANG X C. Normal families of holomorphic mappings into complex projective space concerning shared hyperplanes[J]. [Pacific Journal of Mathematics](#), 2014, 272(1): 245–256.
- [12] RU M. Nevanlinna theory and its relation to diophantine approximation[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2001.
- [13] ZALCMAN L. A heuristic principle in complex function theory[J]. [The American Mathematical Monthly](#), 1975, 82(8): 813–817.
- [14] ZALCMAN L. Normal families: new perspectives[J]. [Bulletin of the American Mathematical Society](#), 1998, 35(3): 215–230.
- [15] EREMENKO A. A picard type theorem for holomorphic curves[J]. [Periodica Mathematica Hungarica](#), 1999, 38(1): 39–42.