

Hadamard 缺项幂级数及双曲完备极小曲面

张建肖, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 基于具有 Hadamard 缺项的特殊幂级数, 研究了一类位于 $\mathbb{R}^3$ 中 2 个平行平面之间的双曲型完备极小曲面族。首先得到如下结果: 若 $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个具有 Hadamard 缺项的幂级数, 其中, $z \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, 且满足给定的 3 个特殊条件, 则对于单位圆盘 Δ 内的任意发散曲线 γ , 有 $\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$ 。同时列举出了满足上述条件的具体的解析函数, 其次通过选择适当的 Weierstrass 表示对, 并利用上述结论, 构造出了位于 $\mathbb{R}^3$ 中 2 个平行平面之间的双曲型完备极小曲面族及其具体形式。

关键词: Hadamard 缺项幂级数; 发散曲线; 完备极小曲面; Weierstrass 表示对

中图分类号: O 176.1 **文献标志码:** A

Power series with Hadamard gaps and hyperbolic complete minimal surfaces

ZHANG Jianxiao, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on the special power series with Hadamard gaps, a family of hyperbolic complete minimal surfaces located between two parallel planes in $\mathbb{R}^3$ was studied. Firstly, the following results were obtained: Let $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ be a series with Hadamard gaps, where $z \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, and satisfy three given special conditions. Then for all divergent paths γ in the unit disk Δ , $\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$ satisfies. At the same time, the specific analytical functions satisfying the above conditions were listed. Secondly, by selecting the appropriate Weierstrass representation pair and using the above conclusion, the hyperbolic complete minimal curved surface family and its specific form between two parallel planes in $\mathbb{R}^3$ were constructed.

Keywords: power series with Hadamard gaps; divergence curve; complete minimal surface; Weierstrass representation pair

1 问题的提出

极小曲面理论是近年来发展较快的一个数学分支, 它广泛存在于自然界当中。关于极小曲面的很多问题也源于自然界, 这就为学者们更好地了解极小曲面的性质创造了有利条件。1954年, Calabi^[1]提出了以下2个猜想:

猜想 1 包含于 $\mathbb{R}^3$ 的半空间中的完备极小曲面一定是平面。

猜想 2 $\mathbb{R}^3$ 中的完备极小曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中的无界子集。

1980年, Jorge等^[2]利用Runge逼近定理证明了存在位于 $\mathbb{R}^3$ 中2个平行平面之间非平坦的完备极小曲面, 从而否定了猜想1。

1996年, Nadirashvili^[3]利用Runge逼近定理否定了猜想2, 证明了存在极小浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中单位球的具有负Gauss曲率的完备极小曲面。但是, 他们的证明只是表明存在相应的极小曲面, 没有给出具体的满足条件的极小曲面的例子。

于是, 这就需要学者们对于能否构造出具体的完备极小曲面实例进行深入的研究。

1992年, Brito^[4]利用Hadamard缺项幂级数构造了 $\mathbb{R}^3$ 中位于2个平行平面间的完备极小曲面族, 给出了实例, 得到定理1。

定理 1^[4] 若 $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个Hadamard缺项幂级数, 其中, $z \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, 且满足下列条件:

- a. $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ 收敛;
- b. $\lim_{j \rightarrow \infty} |a_j| \min\{(n_j/n_{j-1}), (n_{j+1}/n_j)\} = \infty$;
- c. $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j$ 发散;

则对于 Δ 内的任意发散曲线 γ , 有

$$\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$$

由此, 只要令Weierstrass表示中的 $f=1$ 且 $g=h'$, 即可得到 $\mathbb{R}^3$ 中2个平行平面间的完备极小曲面族。于是, 研究发现Hadamard缺项幂级数与完备极小曲面存在紧密的联系。

根据定理1的条件a和b可知, 当 j 充分大时, $\min\{(n_j/n_{j-1}), (n_{j+1}/n_j)\}$ 趋向于 ∞ 的速度远大于 $|a_j|$ 趋向于0的速度。于是, 自然地可以提出如下问题: 能否减弱此条件。

受到1991年孙道椿^[5]证明方法的启发, 作者继续研究能否构造出位于 $\mathbb{R}^3$ 中2个平行平面间的完备极小曲面, 得到定理2。

定理 2 若 $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个Hadamard缺项幂级数, 其中, $z \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, 且满足下列条件:

- a. $\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| \eta < 1, |a_j| \neq 0$;
- b. 对于充分大的 $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} |a_j| n_j < \frac{1}{4e} |a_k| n_k \text{ 且 } \frac{q_k}{2} - \ln q_k - \ln \frac{1-\eta}{8\eta}$$

其中, $q_k = \frac{n_{k+1}}{n_k}$ 且 $q_k > 2$;

- c. $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 n_j$ 发散;

则对于单位圆盘 Δ 内的任意发散曲线 γ , 有

$$\int_{\gamma} |h'(z)|^2 |dz| = \infty$$

2 定义与符号

设 Δ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘, 现讨论由 Δ 参数化的完备极小曲面。

现给出Hadamard缺项幂级数的定义。

定义 1^[6-7] 若 $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ 是一个收敛半径为1的幂级数, 其中, $z \in \mathbb{C}$, 且满足

$$n_{j+1}/n_j \geq q > 1, j = 1, 2, \dots,$$

则称 $f(z)$ 为Hadamard缺项幂级数。

关于缺项幂级数的更多结果可参见文献[8]。

定义 2^[9-10] $\mathbb{R}^3$ 中平均曲率恒为零的曲面称为极小曲面。

定义 3^[10] 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开子集, $\gamma: [0, a) \rightarrow D$ 是 D 内的连续曲线。若对 D 的任意紧子集 K , 存在 $t_0, 0 < t_0 < a$, 对任意 $t \in (t_0, a)$, 有 $\gamma(t) \notin K$, 则称 γ 是发散的, 记作 $\gamma \rightarrow \partial D$ 。

定义 4^[10] 设 $I: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一个浸入, 且 D 具有诱导度量, 即 $\|v\|_D = \|I_* v\|_{\mathbb{R}^3}$, 这里 $I_*: T_z(D) \rightarrow T_{I(z)}(\mathbb{R}^3)$ 是浸入 I 的切映射。若对于任意的光滑发散曲线 $\gamma: [0, a) \rightarrow D$, 其在诱导度量下的弧长为无穷大, 则称浸入 $I: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是完备的。

定义 5^[11-13] 设单连通区域 $D \subseteq \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是 D 上的全纯函数, $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是 D 上的亚纯函数, 满足若 z_0 是 g 的 $k(\geq 1)$ 重极点, 则 z_0 是 f 的 $2k$ 重零

点;反之亦然。令

$$\begin{cases} x_1(z) = a_1 + \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} f(1 - g^2) d\xi \\ x_2(z) = a_2 + \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2} f(1 + g^2) d\xi \\ x_3(z) = a_3 + \operatorname{Re} \int_0^z f g d\xi \end{cases} \quad (1)$$

则称 $x = (x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为极小曲面 M 的 Enneper-Weierstrass 表示, 或简称 Weierstrass 表示, (f, g) 称为极小曲面 M 的 Weierstrass 表示对, 由 (f, g) 生成的极小曲面可记为 $M(f, g)$ 。

此时, M 上的度量定义为

$$ds = \lambda(z) |dz| = \frac{1}{2} |f|(1 + |g|^2) |dz| \quad (2)$$

3 定理 2 的证明

对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$R_k = \left\{ z \in \Delta : 1 - \frac{1}{n_k} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2n_k} \right\}$$

每一个 R_k 都是一个宽度为 $\frac{1}{2n_k}$ 的环, 且对于充分大的 k , 每个环形 R_k 互不相交。

$$\begin{aligned} |h'(z)| &= \left| \sum_{j=1}^\infty n_j a_j z^{n_j-1} \right| > \left| \sum_{j=1}^\infty n_j a_j z^{n_j} \right| \geq \\ n_k |a_k| |z|^{n_k} - \left| \sum_{j=1}^{k-1} n_j a_j z^{n_j} \right| - \left| \sum_{j=k+1}^\infty n_j a_j z^{n_j} \right|, \quad z \in \Delta \quad (3) \end{aligned}$$

对任意固定的 k , 记 $A_k = n_k a_k z^{n_k}, B_k = \sum_{j=1}^{k-1} n_j a_j z^{n_j},$

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{j=k+1}^\infty n_j a_j z^{n_j}。 \\ \text{由式 (3) 可得,} \\ |h'(z)| &\geq |A_k| - |B_k| - |C_k|, \quad z \in \Delta, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4) \end{aligned}$$

现假设 k 充分大。当 $z \in R_k$ 时, $|A_k| \geq |a_k| n_k \cdot \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 。

因为, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = \frac{1}{e}$, 所以, 存在 $k_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|A_k| \geq \frac{1}{2e} |a_k| n_k, \quad k \geq k_1, \quad z \in R_k \quad (5)$$

另一方面, 由定理 2 的条件 b 可得, 存在 $k_2 \in \mathbb{N}, k_2 \geq k_1$, 使得

$$|B_k| < \frac{1}{4e} |a_k| n_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2e} |a_k| n_k \right), \quad k \geq k_2, \quad z \in R_k \quad (6)$$

因为, 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln(1 - x) < -x$, 又根据定理 2 的条件 a 可得,

$$\begin{aligned} |C_k| &\leq \sum_{j=k+1}^\infty |a_j| n_j \left(1 - \frac{1}{2n_k}\right)^{n_j} = \sum_{j=k+1}^\infty |a_j| n_j e^{n_j \ln(1 - \frac{1}{2n_k})} \leq \\ &\sum_{j=k+1}^\infty \eta^{j-k} |a_k| n_j e^{-\frac{n_j}{2n_k}}, \quad z \in R_k \end{aligned}$$

由定理 2 的条件 b 可知, 对于充分大的 k , $n_{k+1} > 2n_k$, 又由于当 $x > a$ 时, 函数 $x e^{-x/a}$ 是递减函数, 故

$$|C_k| \leq \sum_{j=k+1}^\infty \eta^{j-k} |a_k| n_{k+1} e^{-\frac{n_{k+1}}{2n_k}}, \quad z \in R_k \quad (7)$$

再由定理 2 的条件 b 和式 (7) 可得, 存在 $k_3 \in \mathbb{N}, k_3 \geq k_2$, 使得

$$\begin{aligned} |C_k| &\leq \frac{\eta}{1 - \eta} |a_k| n_{k+1} e^{-\frac{n_{k+1}}{2n_k}} \leq \frac{1}{8e} |a_k| n_k = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2e} |a_k| n_k \right), \\ k &\geq k_1, \quad z \in R_k \quad (8) \end{aligned}$$

由式 (4)~(6) 和式 (8) 可得, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq k_3$, 使得

$$|h'(z)| \geq \frac{1}{8e} |a_k| n_k$$

取 Δ 内的发散曲线 γ , 对于任意的 $k \geq l, l \in \mathbb{N}$, γ 必定穿过 R_k , 则

$$\begin{aligned} \int_\gamma |h'(z)|^2 |dz| &\geq \sum_{k=l}^\infty \int_{\gamma \cap R_k} |h'(z)|^2 |dz| \geq \\ &\sum_{k=l}^\infty \frac{1}{128e^2} |a_k|^2 n_k = \infty \end{aligned}$$

根据定理 2 的条件 c 可以得到最后的不等式。所以, 定理 2 得证。

设 $h(z) = \sum_{j=1}^\infty a_j z^{n_j}, z \in \mathbb{C}$, 其中, $a_j = \frac{1}{2^j}, n_j = (16e)^j$ 。易得 $h(z)$ 满足定理 2 的条件 a~c, 但不满足定理 1 的条件 b。

4 推 论

设 $A(\Delta)$ 是由在单位圆盘 Δ 内的解析的函数构成的集合。

推论 1 存在 $h \in A(\Delta)$, 使 h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面 M 的 Gauss 映射, 其中, M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 个平行平面之间。

证明 设 M 为 Weierstrass 表示中取 $f = 1, g = h'$ 所得的极小曲面, 其中, h 满足定理 2 的条件, 则 $h \in A(\Delta)$ 。

由于 $\lambda(z)|dz| = \frac{1}{2}(1+|h'(z)|^2)|dz|$, 由定理 2 可以得出此度量是完备的, 所以, h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面 M 的 Gauss 映射。又由于

$$\begin{aligned} x_3(z) &= \operatorname{Re} \int_0^z f(\xi)g(\xi)d\xi = \\ \operatorname{Re} \int_0^z h'(\xi)d\xi &= \\ \operatorname{Re}(h(z) - h(0)) &= \\ \operatorname{Re}(h(z)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \end{aligned}$$

所以, M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 个平行平面之间。

推论 1 的证明过程与 Brito^[4] 的推论相同。

参考文献:

- [1] CALABI E. The space of Kahler metrics[C]// Proceedings of the International Congress of Mathematics. Amsterdam, 1954 (2): 206-207.
- [2] JORGE L, XAVIER F. A complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ between two parallel planes[J]. Annals of Mathematics, 1980, 112(2): 203-206.
- [3] NADIRASHVILI N. An application of potential analysis to minimal surfaces[J]. [Moscow Mathematical Journal](#), 2001, 1(4): 601-604.
- [4] DE BRITO F F. Power series with Hadamard gaps and hyperbolic complete minimal surfaces[J]. Duke Mathematical Journal, 1992, 68(2): 297-300.
- [5] 孙道椿. 缺项及随机级数的边界性质 [J]. 武汉大学学报 (自然科学版), 1991(1): 7-10.
- [6] 杨连中, 王安斌. 具有 Hadamard 缺陷的幂级数与正规级数 (英文版)[J]. 东北数学, 1991, 7(4): 453-456.
- [7] GNUSCHKE D. On power series with Hadamard gaps[J]. Analysis, 1984, 4(1/2): 61-72.
- [8] ZYGMUND A. Trigonometric series[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.
- [9] 刘计善. 一类极小曲面造型设计的新方法 [J]. 复旦学报 (自然科学版), 2007, 46(2): 192-197.
- [10] XAVIER F, 潮小李. 现代极小曲面讲义 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [11] OSSERMAN R. A survey of minimal surfaces[M]. New York: Dover Publications, 1986.
- [12] COSTA C J, SIMÕES P A Q. Complete minimal surfaces of arbitrary genus in a slab of $\mathbb{R}^3$ [J]. [Annales de L'institut Fourier](#), 1996, 46(2): 535-546.
- [13] BARBOSA J L M, COLARES A G. Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1986, 27(1): 34-46.

(编辑: 石 瑛)