

广义河床流体模型方程单调递减扭状孤波解的渐近稳定性

张 坤, 汪成伟, 张卫国

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了广义河床流体模型方程单调递减扭状孤波解的渐近稳定性。首先运用平面动力系统的理论和方法证明了该方程扭状孤波解的存在性; 其次证明了该单调递减扭状孤波解具有的 3 个性质, 特别是给出了该行波解的一阶和二阶导数估计式; 最后运用反导数方法、先验估计方法和 Young 不等式, 证明了该模型方程单调递减扭状孤波解是渐近稳定的。

关键词: 广义河床流体模型方程; 单调递减扭状孤波解; 渐近稳定性; 能量先验估计
中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Asymptotic stability of the monotone decreasing kink profile solitary-wave solution for generalized river-bed model equation

ZHANG Kun, WANG Chengwei, ZHANG Weiguo

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The asymptotic stability of monotone decreasing kink profile solitary-wave solution for generalized river-bed model equation was mainly studied. Firstly, by using the theory of planar dynamical system, the existence of kink profile solitary-wave solution of this equation was proved. Secondly, three properties of the monotone decreasing kink profile solitary-wave solution were proved, especially the first-order and second-order derivative estimation formulas of this traveling wave solution were given. Finally, by using anti-derivative strategy, with the help of priori estimate and Young inequality, it was proved that the monotone decreasing kink profile solitary-wave solution of model equation was asymptotically stable.

Keywords: generalized river-bed model equation; monotone decreasing kink profile solitary-wave solution; asymptotic stability; energy priori estimate

1 问题的提出

广义河床流体模型方程

$$u_t + \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xt} + u_{xxx} + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

是一个重要的模型方程，其中， $\delta \geq 0$ ， $f(u) = \beta u^{p+1}$ ， p 为任意的正整数，常数 $\beta > 0$ 。不难发现，当 $p = 1$ 时，式(1)即化为河床流体模型方程

$$u_t + \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xt} + u_{xxx} + 2\beta uu_x = 0 \tag{2}$$

方程(2)源自于两相流体模型的研究^[1-5]。当 $\varepsilon = \delta = 0$ ， $p = 1$ 时，方程(1)即化为KdV方程^[6]

$$u_t + 2\beta uu_x + u_{xxx} = 0$$

当 $\delta = 0$ ， $p = 1$ 时，方程(1)可以化为KdV-Burgers方程^[7-12]

$$u_t + 2\beta uu_x + \varepsilon u_{xx} + u_{xxx} = 0$$

当 $\delta = 0$ ， $p = 2$ 时，方程(1)可以化为MKdV-Burgers方程^[13-16]

$$u_t + 3\beta u^2 u_x + \varepsilon u_{xx} + u_{xxx} = 0$$

文献[3-5]用数值分析法研究了方程(2)在条件 $u(x + 2\pi) = u(x, t), u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}, t \in [0, \tau]$ (3)下的周期初边值问题，文献[3-4]的研究证明，对周期初边值问题(2)和(3)采用通常的差分方法及Galerkin有限元法得到的差分格式是不稳定的。为此，文献[4]利用特殊技巧给出了其在空间方向上的一个半离散稳定的差分格式。文献[5]用稳定化有限元法的思想，对问题(2)和(3)在一定条件下给出了一种全离散的稳定的差分格式，并用能量法证明了该差分格式的非线性稳定性及收敛性。

文献[17]运用平面动力系统理论对方程(2)的行波解作了定性分析，找到了一个临界值 $\lambda_0 (\lambda_0 = 2\sqrt[4]{c^2 + 4\beta g})$ ，其中， c 为行波波速， g 为积分常数)，得出结论：

若耗散系数 ε, δ 满足 $\varepsilon + c\delta < -\lambda_0 (\varepsilon + c\delta > \lambda_0)$ ，则方程(2)有唯一的单调递减(递增)扭状孤波解；

若耗散系数 ε, δ 满足 $-\lambda_0 < \varepsilon + c\delta < 0 (0 < \varepsilon + c\delta < \lambda_0)$ ，则方程(2)有唯一的衰减振荡解。

文献[17]求出了在耗散作用较小(即 $|\varepsilon + c\delta| < \lambda_0$)时，方程(2)衰减振荡解的近似解，且给出了近似解与真解的误差估计。但文献[17]并没有研究当 $\varepsilon + c\delta < -\lambda_0$ 时方程(2)单调递减扭状孤波解的稳定性。

受文献[17]的启发，本文将研究广义河床流

体模型方程(1)在耗散系数 ε, δ 满足 $\varepsilon + c\delta < -\lambda^*$ (λ^* 待求)时，单调递减行波解 $u(\xi)$ 的存在性，以及其是否具有渐近稳定性的问题。

值得指出，Pego^[18]利用 L^2 能量估计方法证明了KdV-Burgers方程单调冲击波解的渐近稳定性。本文所研究的河床流体模型方程(1)虽然当 $\delta = 0$ ， $p = 1$ 时，形式上形如KdV-Burgers方程，但因方程(1)中耗散项为 $\varepsilon u_{xx} - \delta u_{xt}$ 且非线性项为高次非线性项 $(u^{p+1})_x$ ，由此在作稳定性研究时增加了难度。为了解决这些困难，本文将运用反导数方法，并充分利用方程(1)单调递减扭状孤波解存在的条件 $\varepsilon + c\delta < -\lambda^*$ ，以及该扭状孤波解的一阶、二阶导数所满足的性质和一些估计技巧，去得到方程(1)的扭状孤波解关于扰动的一致能量估计。由此证明方程(1)单调递减扭状孤波解是渐近稳定的结论。

2 方程(1)单调递减扭状孤波解的存在性

运用平面动力系统的理论^[19-21]来研究方程(1)在 $\varepsilon + c\delta < -\lambda^*$ 情况下单调递减行波解的存在性。

设方程(1)具有行波解 $u(t, x) = u(\xi) = u(x - ct)$ ，则 $u(\xi)$ 满足

$$-cu'(\xi) + \varepsilon u''(\xi) + c\delta u''(\xi) + u'''(\xi) + \beta(p+1)u^p(\xi)u'(\xi) = 0$$

其中， c 为波速。对上式关于 ξ 积分一次，可得

$$u''(\xi) + (\varepsilon + c\delta)u'(\xi) - cu(\xi) + \beta u^{p+1}(\xi) = k$$

这里的 k 是积分常数。由于本文主要研究的是系统的耗散效应，假设所研究的行波解满足

$$cu'(\xi), u''(\xi) \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow \infty \tag{4}$$

且渐近值 C_+ 和 $C_- (C_+ = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi), C_- = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi))$ 满足

$$\beta x^{p+1} - cx = 0 \tag{5}$$

由此，在假设式(4)和式(5)条件下，方程(1)的行波解满足

$$u''(\xi) + (\varepsilon + c\delta)u'(\xi) - cu(\xi) + \beta u^{p+1}(\xi) = 0 \tag{6}$$

在接下来的讨论中，始终假设方程(1)的行波解满足式(4)和式(5)。

令 $x = u(\xi)$ ， $y = u'(\xi)$ ，则方程(6)等价于如下平面动力系统：

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = y \equiv P(x,y) \\ \frac{dy}{d\xi} = -(\varepsilon + c\delta)y + cx - \beta x^{p+1} \equiv Q(x,y) \end{cases} \quad (7)$$

由于方程 (6) 的有界解对应于系统 (7) 的有界轨线。因此, 可以通过研究系统 (7) 的有界轨线及其性态来研究方程 (6) 的解及性态。

首先, 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -(\varepsilon + c\delta)$, 根据 Bendixson-Dulac's 判别法^[19-21], 有命题 1 成立。

命题 1 当 $\varepsilon + c\delta \neq 0$ 时, 系统 (7) 在 (x,y) 平面上不存在闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线。进而当 $\varepsilon + c\delta \neq 0$ 时, 方程 (1) 不存在周期波解和钟状孤波解。

在平面 (x,y) 上, 系统 (7) 的有限远奇点的个数依赖于代数方程 $f(x) = \beta x^{p+1} - cx = 0$ 。记 $x_0 = 0, x_1 = (c/\beta)^{1/p}, x_2 = -x_1$ 。对于 $f(x) = 0$ 的实根, 有以下结果:

a. 若 $c > 0$, 当 p 为偶数时, 方程 $f(x)$ 有 3 个不同的实根 x_0, x_1, x_2 ; 当 p 为奇数时, 方程 $f(x)$ 有 2 个不同的实根 x_0, x_1 。

b. 若 $c < 0$, 当 p 为偶数时, 方程 $f(x)$ 仅有 1 个实根 x_0 ; 当 p 为奇数时, 方程 $f(x)$ 有 2 个不同的实根 x_0, x_1 。

由于系统 (7) 在 $c < 0$ 且 p 为偶数时只有 1 个奇点, 故在 $\varepsilon + c\delta \neq 0$ 情况下方程 (1) 不存在有界行波解, 所以, 将不考虑这种情况。

系统 (7) 在奇点 $P_i(x_i, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(x_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x_i) & -(\varepsilon + c\delta) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2$$

因此, $J(x_i, 0)$ 的行列式即 $\det(J(x_i, 0))$ 等于 $f'(x_i)$, $i = 0, 1, 2$ 。用 Δ_i 表示特征方程在 $P_i(x_i, 0)$ 处的判别式, $\Delta_i = (\varepsilon + c\delta)^2 - 4f'(x_i)$, $i = 0, 1, 2$ 。从而可知 $\Delta_0 = (\varepsilon + c\delta)^2 + 4c, \Delta_1 = (\varepsilon + c\delta)^2 - 4pc$; 如果 p 为偶数, 则有 $\Delta_1 = \Delta_2$ 。

接下来运用平面动力系统的理论和方法^[19-21]讨论系统 (7) 奇点的类型, 并给出在条件 $\varepsilon + c\delta < 0$ 下的全局相图。

在条件 $\varepsilon + c\delta < 0$ 下, 由于 $\det(J(0, 0)) = f'(0) = -c$, 易知当 $c > 0$ 时, P_0 为鞍点; 当 $c < 0$ 且 $\Delta_0 > 0$ 时, P_0 为不稳定的结点; 当 $c < 0$ 且 $\Delta_0 < 0$ 时, P_0 为不稳定的焦点。奇点 P_i 的类型如下所示:

a. 若 $c > 0$, 当 p 为偶数时, 由于 $\det(J(x_i, 0)) = f'(x_i) > 0$, 当 $\Delta_1 > 0$ 时, $P_i (i = 1, 2)$ 为不稳定的结点; 当 $\Delta_1 < 0$ 时, $P_i (i = 1, 2)$ 为不稳定的焦点。当

p 为奇数时, 由于 $\det(J(x_1, 0)) = f'(x_1) > 0$, 当 $\Delta_1 > 0$ 时, P_1 为不稳定的结点; 当 $\Delta_1 < 0$ 时, P_1 为不稳定的焦点。

b. 若 $c < 0$, 当 p 为奇数时, 系统 (7) 有 2 个奇点 $P_0(0, 0)$ 和 $P_1(x_1, 0)$ 。又因为 $\det(J(x_1, 0)) = f'(x_1) < 0$, 故 P_1 为鞍点。

用 Poincare 变换对系统 (7) 作无穷远奇点分析, 易知在 y 轴的正负 2 个方向上有一对无穷远奇点 A_1 和 A_2 。其中, A_1 位于 y 轴的正半轴, A_2 位于 y 轴的负半轴。当 p 为偶数时, 点 $A_i (i = 1, 2)$ 周围存在 1 个双曲型区域; 当 p 为奇数时, 点 $A_i (i = 1, 2)$ 周围存在 1 个抛物型区域。此外, Poincare 圆盘的圆周为轨线。

根据上述定性分析, 可以得到系统 (7) 在 $\varepsilon + c\delta < 0$ 条件下的全局相图, 如图 1 所示。

由图 1 可以得到命题 2。

命题 2 设 $\varepsilon + c\delta < 0$ 。若 $c > 0, p$ 为偶数, 系统 (7) 存在 2 个异宿轨线 $L(P_1, P_0)$ 和 $L(P_2, P_0)$ (图 1(a) 和 (b)); 当 p 为奇数时, 无论 $c > 0$ 或 $c < 0$, 系统 (7) 均存在 1 个异宿轨线 $L(P_1, P_0)$ 或 $L(P_0, P_1)$ (图 1(c)~(f))。

由于平面动力系统同宿轨和闭轨对应于相应非线性发展方程的钟状孤波解和周期波解, 异宿轨对应于扭状孤波解或振荡行波解等。因此, 由命题 2 和图 1 可以得到定理 1 和定理 2。

定理 1 设 $\varepsilon + c\delta < 0$, 若 $c > 0, p$ 为偶数, 方程 (1) 有 2 个有界行波解 (对应于图 1(a) 和 (b) 中的异宿轨线 $L(P_1, P_0)$ 和 $L(P_2, P_0)$); 当 p 为奇数时, 无论 $c > 0$ 或 $c < 0$, 方程 (1) 均有 1 个有界行波解 (对应于图 1(c)~(f) 中的异宿轨线)。

现给出方程 (1) 的有界行波解受耗散作用影响的有关结论。

定理 2 假设 p 为偶数, 且波速 $c > 0$ 。

a. 当 $\varepsilon + c\delta < -2\sqrt{pc}$ 时, 方程 (1) 的 2 个有界行波解是单调的, 其一表现为单调递减的扭状孤波解 $u(\xi)$, 满足 $u(-\infty) = x_1, u(+\infty) = 0$ (对应于图 1(a) 中的轨线 $L(P_1, P_0)$); 而另一个表现为单调递增的扭状孤波解 $u(\xi)$, 满足 $u(-\infty) = x_2, u(+\infty) = 0$ (对应于图 1(a) 中的轨线 $L(P_2, P_0)$)。

b. 当 $-2\sqrt{pc} < \varepsilon + c\delta < 0$ 时, 方程 (1) 的 2 个行波解具有振荡性。

(a) 对应图 1(b) 中轨线 $L(P_1, P_0)$ 的解 $u(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_1, u(+\infty) = 0$ 。该解具有性质: 存在最大

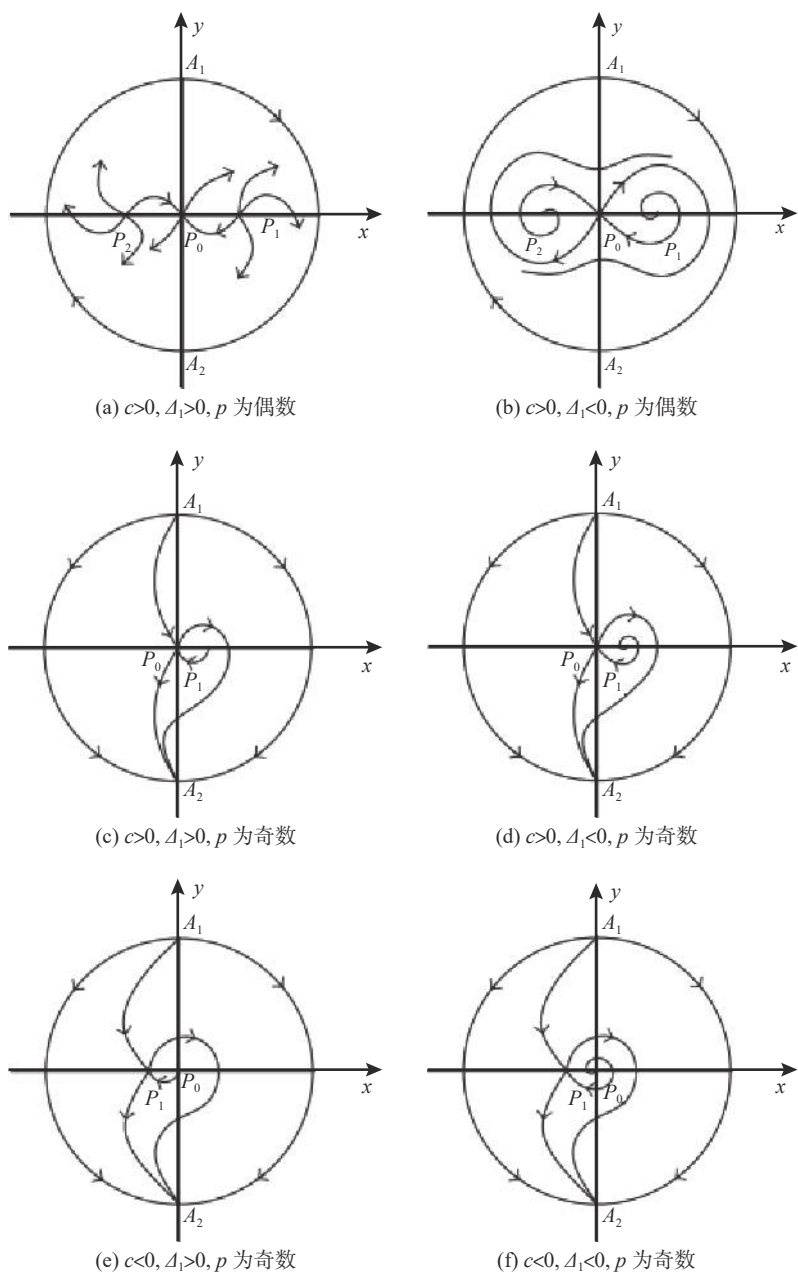


图 1 $\varepsilon + c\delta < 0$ 时的全局相图

Fig.1 Global phase diagrams when $\varepsilon + c\delta < 0$

值点 $\hat{\xi}_1$ ，使得点 $\hat{\xi}_1$ 的右端具有单调递减性，左端具有衰减振荡性，即存在无穷多个极大值点 $\hat{\xi}_i(i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\xi}_i(i = 1, 2, \dots, +\infty)$ ，使得

$$\begin{cases} -\infty < \dots < \check{\xi}_n < \hat{\xi}_n < \dots < \check{\xi}_1 < \hat{\xi}_1 < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = -\infty \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u(+\infty) < u(\check{\xi}_1) < \dots < u(\check{\xi}_n) < \dots < u(-\infty) < \\ \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\hat{\xi}_1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\xi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = u(-\infty) \end{cases} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\xi}_n - \check{\xi}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{n+1}) = \frac{4\pi}{\sqrt{4pc - (\varepsilon + c\delta)^2}} \quad (10)$$

(b) 对应图 1(b) 中轨线 $L(P_2, P_0)$ 的解 $u(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_2$ ， $u(+\infty) = 0$ 。该解具有性质：存在最小值点 $\check{\xi}_1$ ，使得点 $\check{\xi}_1$ 的右端具有单调递增性，左端具有衰减振荡性，即存在无穷多个极大值点 $\hat{\xi}_i(i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\xi}_i(i = 1, 2, \dots, +\infty)$ ，使得

$$\begin{cases} -\infty < \dots < \check{\xi}_n < \hat{\xi}_n < \dots < \check{\xi}_1 < \hat{\xi}_1 < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = -\infty \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} u(\xi_1) < \cdots < u(\xi_n) < \cdots < u(-\infty) < \cdots < \\ u(\hat{\xi}_n) < \cdots < u(\hat{\xi}_1) < u(+\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = u(-\infty) \end{cases} \quad (12)$$

并且使得式 (10) 成立。

证明 证明定理 2 的结论 a。对方程 (6) 作变换, $V(\xi) = \frac{u(\xi) - x_2}{x_1 - x_2}$, 其中, $x_1 = (c/\beta)^{1/p}$, $x_2 = -x_1$, 则有

$$V''(\xi) + (\varepsilon + c\delta)V'(\xi) + 2^p c \left(V(\xi) - \frac{1}{2} \right) \cdot \left[\left(V(\xi) - \frac{1}{2} \right)^p - \left(\frac{1}{2} \right)^p \right] = 0 \quad (13)$$

如果 p 为偶数, 式 (13) 等价于

$$V''(\xi) + (\varepsilon + c\delta)V'(\xi) + 2^p c V(\xi) \cdot \left(V(\xi) - \frac{1}{2} \right) (V(\xi) - 1) \left[\left(V(\xi) - \frac{1}{2} \right)^{p-2} + \left(V(\xi) - \frac{1}{2} \right)^{p-4} \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^{p-2} \right] = 0 \quad (14)$$

显然, 如果 p 为偶数, 那么, $P_1'(0,0)$, $P_2'\left(\frac{1}{2},0\right)$, $P_3'(1,0)$ 是式 (14) 所对应系统的奇点, 它们分别对应系统 (7) 的奇点 $P_1(x_2,0)$, $P_2(0,0)$, $P_3(x_1,0)$ 。由于线性变换保留了奇点的性质, 所以, 前面给出的关于奇点 $P_i(i=1,2,3)$ 的性质在相应的条件下对 $P_i'(i=1,2,3)$ 同样成立。

由前面的定性分析可知, 式 (6) 不存在满足 $u(-\infty) = u(+\infty)$ 的有界解, 在 p 为偶数且 $c > 0$ 的情况下, 它只有满足以下两种情况的有界解:

- (A) $u(-\infty) = x_1, u(+\infty) = 0$
- (B) $u(-\infty) = x_2, u(+\infty) = 0$

由此, 相对应的方程 (13) 或方程 (14) 就只可能存在满足下列情况的有界解:

- (A₁) $V(-\infty) = 1, V(+\infty) = 1/2$
- (B₁) $V(-\infty) = 0, V(+\infty) = 1/2$

以下的证明将使用引理 1。

引理 1 假设 $g \in C^1[0,1]$, $g(0) = g(1) = 0$, $g'(0) > 0$, $g'(1) < 0$, 对任意 $u \in (0,1)$, $g(u) > 0$ 成立。则存在 r^* 满足

$$-2\sqrt{\sup \frac{g(u)}{u}} \leq r^* \leq -2\sqrt{g'(0)} \quad (15)$$

使得下列问题:

$$\begin{cases} u'' + ru' + g(u) = 0 \\ (-\infty) = 0, u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

存在单调解的充要条件是 $r \leq r^*$ 。

引理 1 引自文献 [22-24]。现在来考虑式 (13) 满足条件(A₁)的解。

令 $w = 2(1 - V)$, 即 $V = 1 - (1/2)w$, 则方程 (13) 满足条件(A₁)的解等价于定解问题

$$\begin{cases} w'' + (\varepsilon + c\delta)w' + c(w-1)[(1-w)^p - 1] = 0 \\ w(-\infty) = 0, w(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (16)$$

的解。假设 $g(w) = c(w-1)[(1-w)^p - 1]$, $w \in [0,1]$ 。很容易证明 $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ 。又 $g' = c[(p+1)(1-w)^p - 1]$, $g'(0) = pc$, $g'(1) = -c < 0$, 且对任意 $w \in (0,1)$, $g(w) > 0$ 成立。故根据引理 1, 存在满足式 (15) 的 r^* , 使得当 $\varepsilon + c\delta \leq r^*$ 时, 式 (16) 存在单调解。

由于

$$\left(\frac{g(w)}{w} \right)' = \frac{c[(1-w)^p(pw+1)-1]}{w^2} = \frac{cl(w)}{w^2}, \quad \forall w \in (0,1) \quad (17)$$

其中, $l(w) = (1-w)^p(pw+1)-1$, $w \in [0,1]$ 。对任意的 $w \in (0,1)$, $l'(w) = -p(p+1)w(1-w)^{p-1} < 0$, 又 $l(0) = 0$, 故对于任意的 $w \in (0,1)$, 有 $l(w) < 0$ 。

由此据式 (17) 可知, 对任意的 $w \in (0,1)$, $(g(w)/w)' = cl(w)/w^2 < 0$, 即 $g(w)/w$ 在 $(0,1)$ 上单调递减。所以, 有

$$\sup_{(0,1)} \frac{g(w)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} g'(w) = pc$$

再据引理 1 中的式 (15), 可知 $r^* = -2\sqrt{pc}$ 。由此据引理 1 可知, 当 $\varepsilon + c\delta \leq r^* = -2\sqrt{pc}$ 时, 问题 (16) 存在单调递增的行波解。

由于 $V(\xi) = 1 - (1/2)w(\xi)$, $u(\xi) = x_2 + (x_1 - x_2)V(\xi)$, 故当 $\varepsilon + c\delta \leq -2\sqrt{pc}$ 时, 方程 (1) 满足条件 (A) 的行波解 $u(\xi)$ 表现为单调递减的扭状孤波解。

接下来再考虑式 (13) 满足条件(B₁)的解。令 $\bar{w} = 2V$, 即 $V = (1/2)\bar{w}$, 则式 (13) 满足条件(B₁)的解等价于方程

$$\begin{cases} \bar{w}'' + (\varepsilon + c\delta)\bar{w}' + c(\bar{w}-1)[(1-\bar{w})^p - 1] = 0 \\ \bar{w}(-\infty) = 0, \bar{w}(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (18)$$

的解。当 p 为偶数时, 式 (16) 和式 (18) 相同。故据对问题 (16) 的讨论可知, 存在 $r^* = -2\sqrt{pc}$, 使当 $\varepsilon + c\delta \leq r^* = -2\sqrt{pc}$ 时, 问题 (18) 的解 $\bar{w}(\xi)$ 单调递增。

由于此时 $V(\xi) = (1/2)\bar{w}(\xi)$, $V(\xi)$ 随着 $\bar{w}(\xi)$ 的增加而增加。由此推知: 当 $\varepsilon + c\delta \leq -2\sqrt{pc}$ 时, 方程 (1) 满足条件 (B) 的行波解 $u(\xi) = x_2 + (x_1 - x_2)V(\xi)$, 表现为单调递增的扭状孤波解。

现证明定理 2 的结论 b, 即当 $-2\sqrt{pc} < \varepsilon + c\delta < 0$ 时, 方程 (1) 的行波解具有振荡性。以图 1(b) 中的焦-鞍轨线 $L(P_1, P_0)$ 为例, 对于图 1(b) 中的轨线 $L(P_2, P_0)$ 也可以进行类似的证明。由定理 2 的结论 b 的条件可知, 此时有 $\det(J(0, 0)) < 0$, $\det(J(x_1, 0)) = \det(J(x_2, 0)) = pc$, $\Delta_1 = \Delta_2 = (\varepsilon + c\delta)^2 - 4pc < 0$ 。故由平面动力系统理论可知, 方程 (1) 对应的系统 (7) 的 3 个奇点具有性质: $P_0(0, 0)$ 为鞍点, $P_1(x_1, 0)$ 和 $P_0(x_2, 0)$ 为不稳定焦点。当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, 轨线 $L(P_1, P_0)$ 螺旋地趋向于 P_1 。容易看出, 轨线 $L(P_1, P_0)$ 在 P_1 的

右侧与 x 轴的交点对应于 $u(\xi)$ 的极大值点, 而在 P_1 的左侧与 x 轴的交点对应于 $u(\xi)$ 的极小值点。因此, 式 (8) 和式 (9) 均成立。此外, 当轨线 $L(P_1, P_0)$ 充分接近 P_1 时, 其性质趋于系统 (7) 在点 P_1 的线性近似解的性质, 绕点 P_1 旋转的频率趋于 $\sqrt{4pc - (\varepsilon + c\delta)^2} / 4\pi$ 。因此, 有式 (10) 成立。

由于行波解 $u(\xi)$ 在沿 x 轴运动时其形状与波速保持不变, 不失一般性, 假设 $\hat{\xi}_1 = 0$ 或 $\xi_1 = 0$, 则定理 2 的结论 b 所描述的振荡行波解的性态如图 2 所示。

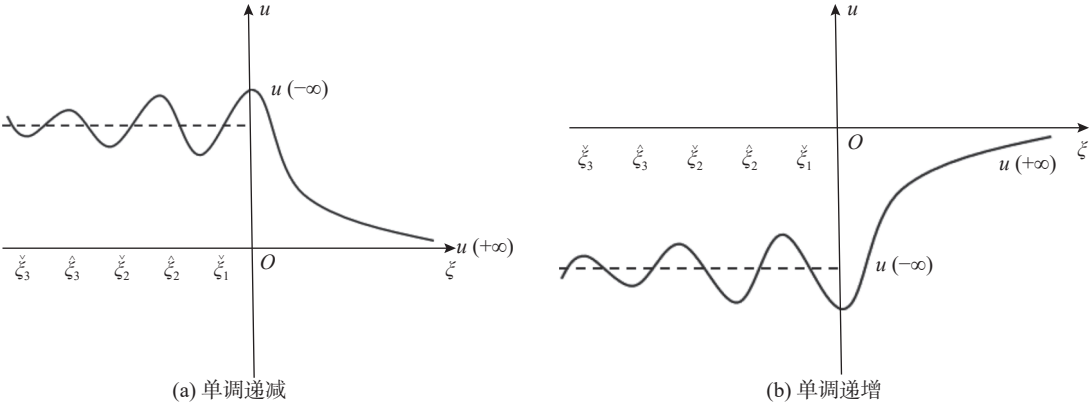


图 2 $c > 0, -2\sqrt{pc} < \varepsilon + c\delta < 0$ 时的振荡行波解示意图
Fig.2 Schematic diagrams of oscillatory traveling wave solutions when $c > 0, -2\sqrt{pc} < \varepsilon + c\delta < 0$

采用同样的方法可以证明定理 3。

定理 3 假设 p 为奇数, 且波速 $c > 0$ 。

a. 当 $\varepsilon + c\delta < -2\sqrt{pc}$ 时, 方程 (1) 具有单调递减的扭状孤波解 $u(\xi)$, 满足 $u(-\infty) = x_1$, $u(+\infty) = 0$ 。 $u(\xi)$ 对应于图 1(c) 中的轨线 $L(P_1, P_0)$ 。

b. 当 $-2\sqrt{pc} < \varepsilon + c\delta < 0$ 时, 方程 (1) 具有振荡行波解 $u(\xi)$, 满足 $u(-\infty) = x_1$, $u(+\infty) = 0$ 。 $u(\xi)$ 对应于图 1(d) 中的轨线 $L(P_1, P_0)$ 。

由定理 2 和定理 3 可知, 在 $c > 0, \varepsilon + c\delta < 0$ 情况下, 若记 $\lambda^* = 2\sqrt{pc}$, 则 λ^* 起到了一个临界值的作用, 当 $|\varepsilon + c\delta| > \lambda^*$ 时, 方程 (1) 的行波解表现为单调的扭状孤波解; 当 $|\varepsilon + c\delta| < \lambda^*$ 时, 行波解是衰减振荡的。

用类似的方法可证, 在 p 为奇数, $c < 0, \varepsilon + c\delta < 0$ 情形有结论: $\exists \bar{\lambda} = 2\sqrt{-c}$, 当 $|\varepsilon + c\delta| > 2\sqrt{-c}$ 时, 方程 (1) 具有 1 个单调递减的扭状孤波解 (对应于图 1(e) 中异宿轨 $L(P_0, P_1)$); 当 $|\varepsilon + c\delta| < 2\sqrt{-c}$ 时, 方程 (1) 具有 1 个衰减振荡解 (对应于图 1(f) 中焦-鞍轨线 $L(P_0, P_1)$)。由于本文的重点是要讨论方程 (1) 在波速 $c > 0, \varepsilon + c\delta < 0$ 情况下单调递减扭状孤波解

的渐近稳定性, 所以, 这里只给出 $c < 0, \varepsilon + c\delta < 0$ 情形的上述结论而略去其证明。

由定理 2 和定理 3 即得推论 1。

推论 1 无论 p 为偶数或是奇数, 设波速 $c > 0, \varepsilon + c\delta < 0$ 。则当 $\varepsilon + c\delta < -\lambda^*$ 时, 方程 (1) 具有单调递减的扭状孤波解 $u(\xi)$, 满足 $u(-\infty) = x_1$, $u(+\infty) = 0$ 。

由此证实了当 $c > 0, \varepsilon, \delta$ 满足 $\varepsilon + c\delta < -\lambda^*$ 时 (其中, $\lambda^* = 2\sqrt{pc}$), 方程 (1) 单调递减扭状孤波解的存在性。

3 广义河床流体模型方程扭状孤波解的重要性质

现研究广义河床流体模型方程 (1) 扭状孤波解的渐近稳定性, 给出这种行波解的 3 个性质。

为了不致混淆, 记 $U(\xi) = u(t, x) (\xi = x - ct)$ 是方程 (1) 在 $c > 0, \varepsilon + \delta c < -\lambda^* (\lambda^* = 2\sqrt{pc})$ 情形推论 1 中的单调递减的扭状孤波解。记

$$U(\xi) \rightarrow u_{\pm}, \quad \xi \rightarrow \pm\infty$$

则 $u_- = x_1$, $u_+ = 0$ 。

将 $U(\xi) = u(t, x) (\xi = x - ct)$ 代入方程 (1), 则 $U(\xi)$ 满足

$$-cU_\xi + (\varepsilon + \delta c)U_{\xi\xi} + U_{\xi\xi\xi} + f(U)_\xi = 0 \quad (19)$$

将方程 (19) 对 ξ 积分, 化为

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} &= cU - f(U) + a \\ a &= -cu_\pm + f(u_\pm) \end{aligned}$$

性质 1 设 $U(\xi)$ 是单调递减的行波解, c 是波速, 那么, Rankine-Hugoniot 条件成立:

$$c(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-)$$

性质 2 设 $U(\xi)$ 是单调递减的行波解, c 是波速, 那么, 满足 Lax-shock 条件:

$$f'(u_+) < c < f'(u_-)$$

证明 由于 $f(u) = \beta u^{p+1}$, 故 $f'(u) = \beta(p+1)u^p$, 且

$$u_- = u(-\infty) = x_1 = \left(\frac{c}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u_+ = u(+\infty) = 0$$

因此, 有

$$f'(u_+) = f'(0) = 0, \quad f'(u_-) = \beta(p+1)u_-^p = c(p+1)$$

从而有 $f'(u_+) < c < f'(u_-)$, 故性质 2 得证。

性质 3 设 $U(\xi)$ 是方程 (1) 的行波解, $U(\xi)$ 是方程 (1) 单调递减的行波解, 则存在常数 C , 使得对任意的 $\xi \in \mathbb{R}$, 有

$$|U_\xi|, |U_{\xi\xi}| \leq C|u_- - u_+|$$

证明 由于 $U(\xi)$ 是单调递减的, 则 $U_\xi \leq 0$, $u_+ < u_-$ 并且 $U - u_+ > 0$ 。将式 (19) 对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 进行积分, 则

$$(\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} = f(U) - f(u_+) - c(U - u_+) \quad (20)$$

对式 (20) 运用积分中值定理, 并注意 $u_+ = 0$, 可将其化为

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} &= f'(u_+ + \theta(U - u_+))(U - u_+) - \\ &= c(U - u_+) = (f'(\theta(U - u_+) - c))(U - u_+), \\ 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (21)$$

a. 当 $f'(\theta(U - u_+)) > c$ 时, 由式 (21) 可知, $(\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} > 0$ 。

又因为 $-c(U - u_+) < 0$, 由式 (20) 即可知

$$-c(U - u_+) \leq (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} \leq f(U) - f(u_+)$$

由于 $f(U) = \beta U^{p+1} = (\beta U^p)U = \bar{f}(U)U$, $\bar{f}(U)$ 作为 U 在 $[0, u_-]$ 上的连续函数, 有最大值 $M_{\bar{f}}$ 。

不妨设 $M_{\bar{f}} > 0$ (若 $M_{\bar{f}} \leq 0$, 可任取 $M_{\bar{f}} > 0$), 于

是有

$$f(U) = \bar{f}(U)U < M_{\bar{f}}U \leq M_{\bar{f}}u_- \leq C|u_- - u_+|$$

其中, C 为常数, 从而有

$$c - C|u_- - u_+| \leq (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} \leq C|u_- - u_+| \quad (22)$$

将式 (22) 两边同时乘以 $e^{(\varepsilon + \delta c)\xi}$, 有

$$\begin{aligned} -Ce^{(\varepsilon + \delta c)\xi}|u_- - u_+| &\leq \frac{d}{d\xi} \left(e^{(\varepsilon + \delta c)\xi} U_\xi \right) \leq \\ &= Ce^{(\varepsilon + \delta c)\xi}|u_- - u_+| \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (23) 对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 上积分, 可得

$$|U_\xi| \leq C|u_- - u_+|$$

b. 当 $f'(\theta(U - u_+)) < c$ 时, 有

$$(\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} < 0$$

易知 $f'(U)$ 在 $[u_+, u_-]$ 上单调递增, 又根据性质 2, 有 $f'(u_+) < c < f'(u_-)$, 故 $f'(\theta(U - u_+)) > 0$ 。再由式 (21) 推出

$$-c(U - u_+) \leq (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi}$$

又因为

$$(\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} < 0 \leq U - u_+$$

有

$$-c(U - u_+) \leq (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} \leq U - u_+$$

故存在常数 C , 使得

$$-C|u_- - u_+| \leq (\varepsilon + \delta c)U_\xi + U_{\xi\xi} \leq C|u_- - u_+| \quad (24)$$

现将式 (24) 两边同乘 $e^{(\varepsilon + \delta c)\xi}$, 有

$$\begin{aligned} -Ce^{(\varepsilon + \delta c)\xi}|u_- - u_+| &\leq \frac{d}{d\xi} \left(e^{(\varepsilon + \delta c)\xi} U_\xi \right) \leq \\ &= Ce^{(\varepsilon + \delta c)\xi}|u_- - u_+| \end{aligned} \quad (25)$$

将式 (25) 对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 上积分, 即得

$$|U_\xi| \leq C|u_- - u_+|$$

又因为

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U_\xi(\xi + \delta) - U_\xi(\xi)}{\delta} \\ |U_{\xi\xi}| &= \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U_\xi(\xi + \delta) - U_\xi(\xi)}{\delta} \right| \end{aligned}$$

从而有

$$|U_{\xi\xi}| \leq \frac{1}{|\delta|} [|U_\xi(\xi + \delta)| + |U_\xi(\xi)|] \leq \frac{1}{|\delta|} 2C|u_- - u_+|$$

将 $\frac{1}{|\delta|} 2C$ 和 C 中的最大者仍记为 C , 则有 $|U_{\xi\xi}| \leq C|u_- - u_+|$ 。性质 3 得证。

4 单调递减扭状孤波解渐近稳定性定理

考虑方程 (1) 的初值问题, 初值条件为

$$u(0, x) = u_0(x)$$

这里 u_0 是有界可测函数, 满足

$$u_0(x) \rightarrow u_{\pm}, x \rightarrow \pm\infty$$

设 U 为单调递减扭状孤波解, 假定

$$u_0 - U \in H^1 \tag{26}$$

并且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^x (u_0 - U)(y) dy, \quad \Phi_0 \in L^2 \tag{27}$$

条件式 (26) 和式 (27) 意味着

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - U)(y) dy = 0$$

定理 4 (渐近稳定性定律) 设 $U(\xi)(\xi = x - ct)$ 是方程 (1) 在 $\varepsilon + \delta c < -\lambda^*$ 情形下的单调递减扭状孤波解, 初值 u_0 满足式 (26) 和式 (27)。记

$$N_0 = \|u_0 - U\|_{H^1} + \|\Phi_0\|_{H^2}$$

则存在与 $u_{\pm}$ 无关的常数 $\mu_1, \gamma_1 (\gamma_1 \leq |u_- - u_+|)$, $u_{\pm}$, 使得当 $|u_- - u_+| \leq \mu_1$ 和 $N_0 \leq \gamma_1$ 时, 方程 (1) 带有初值 $u_0(x)$ 的初值问题的解 $u(t, x)$ 是全局唯一存在的, 并且有

$$u - U \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2) \tag{28}$$

进一步, 该解以最大范数的形式趋近于行波解

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(x - ct)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \tag{29}$$

为了证明定理 4, 首先构造扰动方程。

将 $u(t, x) = U(\xi) + \psi(t, \xi), \xi = x - ct$ 代入方程 (1), 并注意到 $U(\xi)$ 是方程 (1) 的孤波解, 可得 $\psi(t, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \psi_t - c\psi_{\xi} + (\varepsilon + \delta c)\psi_{\xi\xi} - \delta\psi_{t\xi} + \psi_{\xi\xi\xi} + \\ (f(U + \psi) - f(U))_{\xi} = 0 \\ \psi(0, \xi) = \psi_0(\xi) = (u_0 - U)(\xi) \end{cases} \tag{30}$$

于是问题 (29) 就化为证明 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(t, \xi)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 。令

$$\psi = \Phi_{\xi}$$

代入式 (30) 的第一式, 则有

$$\begin{aligned} &\Phi_{t\xi} - c\Phi_{\xi\xi} + (\varepsilon + \delta c)\Phi_{\xi\xi\xi} - \delta\Phi_{t\xi\xi} + \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \\ &(f(U + \Phi_{\xi}) - f(U))_{\xi} = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

将式 (31) 对 ξ 进行积分, 并令积分常数为 0, 则有

$$\begin{aligned} &\Phi_t - c\Phi_{\xi} + (\varepsilon + \delta c)\Phi_{\xi\xi} - \delta\Phi_{t\xi} + \Phi_{\xi\xi\xi} + \\ &(f(U + \Phi_{\xi}) - f(U)) = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

将式 (32) 线性化, 则有

$$\begin{aligned} &\Phi_t - c\Phi_{\xi} + (\varepsilon + \delta c)\Phi_{\xi\xi} - \delta\Phi_{t\xi} + \Phi_{\xi\xi\xi} + \\ &f'(U)\Phi_{\xi} = F(U, \Phi_{\xi}) \end{aligned} \tag{33}$$

其中, $F(U, \Phi_{\xi}) = -(f(U + \Phi_{\xi}) - f(U)) + f'(U)\Phi_{\xi}$, 而原来的初值就转化为

$$\Phi(0, \xi) = \Phi_0(\xi) \tag{34}$$

定义初值问题 (32) 和问题 (34) 的解空间为

$$X(0, T) = \{\Phi \in L^{\infty}(0, T; H^2), \Phi_{\xi} \in L^2(0, T; H^2)\}$$

相应的范数为 $N(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\|\Phi(\tau)\|_{H^2} + \|\Phi_{\xi}(\tau)\|_{H^1}\}$ 。为方便, 记 $N(0)$ 为 N_0 。

定理 4 的证明可分成扰动方程初值问题 (32) 和问题 (34) 解的整体存在性和渐近稳定性两部分。先给出初值问题 (32) 和问题 (34) 解的整体存在性。

定理 5 假设 $\Phi_0 \in H^2$, 则存在与 $u_{\pm}$ 无关的常数 $\mu_1, \gamma_1 (\gamma_1 \leq \gamma_0)$ 和正常数 C_1 , 使得当 $|u_- - u_+| \leq \mu_1$ 和 $N_0 = \|\Phi_0\|_{H^2} + \|\Phi_{0\xi}\|_{H^1} \leq \gamma_1$, 初值问题 (32) 和问题 (34) 的解 Φ 在 $X(0, \infty)$ 中是全局唯一存在的, 且对任意的 $t \in [0, \infty)$ 满足

$$\|\Phi\|_{H^2}^2 + \|\Phi_{\xi}\|_{H^1}^2 + \int_0^t (\|\Phi_{\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau \leq C_1 N_0^2$$

其中, Φ_{ξ} 由式 (31) 定义, $\Phi_{0\xi}$ 为其初值。

为证明定理 5, 需要在局部解存在性的基础上给出一致先验估计。关于初值问题 (32) 和问题 (34) 的解的局部存在性, 有命题 3。

命题 3 (局部存在性) 假设 $N_0 \leq \gamma_0$, 则存在正常数 $T_0(\gamma_0)$ 使得问题 (32) 和问题 (34) 有唯一解 $\Phi \in X(0, T_0)$, 且满足

$$N^2(t) + \int_0^t (\|\Phi_{\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau \leq C_1 N_0^2$$

命题 3 可以利用 Galerkin 方法或不动点定理按标准方法进行证明 (可参考文献 [25-26] 等)。这里由于篇幅限制, 省略证明过程。

在以下的推理过程中将用到 2 个不等式, 现以引理的形式给出。

引理 2 (Young 不等式 [27]) 令 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 (p > 1, q < +\infty)$, 则有下列不等式成立:

$$ab \leq \theta a^p + C(\theta) b^q$$

其中, $\theta > 0$ 是任意常数, 且 $C(\theta) = \frac{1}{q}(\theta p)^{-\frac{q}{p}}$ 。

引理 3 (Gagliardo-Nirenberg 不等式^[28]) 假设 $u \in L^p(R^n)$, $D^m u \in L^q(R^n)$, $1 \leq p, q < \infty$. 则对任意 $j(0 \leq j \leq m)$, 有

$$\|D^j u\|_r \leq C \|u\|_p^{1-\lambda} \|D^m u\|_q^\lambda$$

其中,

$$\frac{1}{r} - \frac{j}{n} = \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n} \right) + (1-\lambda) \frac{1}{p}, \quad \frac{j}{m} \leq \lambda \leq 1$$

当 $m - \frac{n}{q} = j$, $1 < q < \infty$, $\lambda \neq 1$.

现给出解的一致先验估计。为了达到这个目的, 首先给出先验假设

$$N(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{ \|\Phi(\tau)\|_{H^2} + \|\Phi_\xi(\tau)\|_{H^1} \} \leq \gamma_2 \quad (35)$$

其中, γ_2 待定。根据式 (35), 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 有

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\partial_x^k \Phi(\tau)\|_{L^\infty} \leq C \gamma_2, \quad k = 0, 1$$

可以得到如下一致先验估计 (命题 4)。

命题 4 (先验估计) 设 $\Phi \in X(0, T)$ ($T > 0$) 是初值问题 (32) 和问题 (34) 的解, 则存在与 $u_\pm$ 无关的适当的正常数 μ_2, γ_2 ($\gamma_2 \leq \gamma_0$) 和正常数 C_2 , 使得当 $|u_- - u_+| \leq \mu_2$, $N(t) \leq \gamma_2$ 时, 下面估计式对 $t \in [0, T]$ 成立。

$$N^2(t) + \lambda^* \int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau \leq C_2 N_0^2 \quad (36)$$

证明 通过对 Φ 进行低阶和高阶估计来证明式 (36)。

a. 低阶先验估计。

用 Φ 乘以式 (33), 有

$$\begin{aligned} & \Phi \Phi_t - c \Phi \Phi_\xi + (\varepsilon + \delta c) \Phi \Phi_{\xi\xi} - \delta \Phi \Phi_{t\xi} + \Phi \Phi_{\xi\xi\xi} + \\ & f'(U) \Phi \Phi_\xi = \Phi F(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (37)$$

由于

$$\Phi \Phi_t = \frac{1}{2} (\Phi^2)_t$$

$$-c \Phi \Phi_\xi = -\frac{c}{2} (\Phi^2)_\xi$$

$$-\delta \Phi \Phi_{t\xi} = \delta \Phi_t \Phi_\xi + (-\delta \Phi \Phi_t)_\xi$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon + c\delta) \Phi \Phi_{\xi\xi} + \Phi \Phi_{\xi\xi\xi} = \Phi \left[(\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi + \Phi_{\xi\xi} \right]_\xi = \\ & \left[\Phi \left((\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi + \Phi_{\xi\xi} \right) \right]_\xi - \Phi_\xi \left[(\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi + \Phi_{\xi\xi} \right] = \\ & \left[\left(\frac{1}{2} (\varepsilon + c\delta) \Phi^2 \right)_\xi + \Phi \Phi_{\xi\xi} - \frac{1}{2} \Phi_\xi^2 \right]_\xi + (\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi^2 \end{aligned}$$

$$f'(U) \Phi \Phi_\xi = \frac{1}{2} (f'(U) \Phi^2)_\xi - \frac{1}{2} f''(U) U_\xi \Phi^2$$

故式 (37) 可写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\Phi^2)_t - (\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi^2 + \delta \Phi_t \Phi_\xi - \frac{1}{2} f''(U) U_\xi \Phi^2 + \\ & \{Q_1\}_\xi = \Phi F(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (38)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_1 = & -\frac{c}{2} \Phi^2 - \delta \Phi \Phi_t + \left(\frac{1}{2} (\varepsilon + c\delta) \Phi^2 \right)_\xi + \Phi \Phi_{\xi\xi} - \\ & \frac{1}{2} \Phi_\xi^2 + \frac{1}{2} f'(U) \Phi^2 \end{aligned}$$

再用 $\delta \Phi_\xi$ 乘以式 (33), 有

$$\begin{aligned} & \delta \Phi_\xi \Phi_t - \delta c \Phi_\xi^2 + \delta (\varepsilon + \delta c) \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} - \delta^2 \Phi_\xi \Phi_{t\xi} + \delta \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi\xi} + \\ & \delta f'(U) \Phi_\xi^2 = \delta \Phi_\xi F(U, \Phi_\xi) \end{aligned}$$

因为,

$$\Phi_\xi \Phi_{\xi\xi\xi} = (\Phi_\xi \Phi_{\xi\xi})_\xi - \Phi_{\xi\xi}^2$$

所以, 有

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta^2}{2} (\Phi_\xi^2)_t + \delta \Phi_t \Phi_\xi + (\delta f'(U) - c\delta) \Phi_\xi^2 - \\ & \delta \Phi_{\xi\xi}^2 + \{Q_2\}_\xi = \delta \Phi_\xi F(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $Q_2 = \frac{1}{2} \delta (\varepsilon + c\delta) \Phi_\xi^2 + \delta \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi}$ 。

用式 (38) 减去式 (39), 可得

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{\delta^2}{2} \Phi_\xi^2 \right\}_t - (\varepsilon + \delta f'(U)) \Phi_\xi^2 + \delta \Phi_{\xi\xi}^2 - \\ & \frac{1}{2} f''(U) U_\xi \Phi^2 + \{Q_1 - Q_2\}_\xi = \\ & \Phi F(U, \Phi_\xi) - \delta \Phi_\xi F(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (40)$$

取式 (40) 等式左边的第二项, 有

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon + \delta f'(U)) \Phi_\xi^2 = -(\varepsilon + \delta f'(u_+)) \Phi_\xi^2 + \\ & \delta (f'(u_+) - f'(U)) \Phi_\xi^2 \end{aligned}$$

运用积分中值定理, 有

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon + \delta f'(U)) \Phi_\xi^2 = -(\varepsilon + \delta f'(u_+)) \Phi_\xi^2 + \\ & \delta f''(U + \theta(u_+ - U))(u_+ - U) \Phi_\xi^2, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

又因为 $U(\xi)$ 满足性质 2 和 $\varepsilon + \delta c < -\lambda^*$, 可得

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon + \delta f'(U)) \Phi_\xi^2 \geq \lambda^* \Phi_\xi^2 + \\ & f''(U + \theta(u_+ - U)) \delta (u_+ - u_-) \Phi_\xi^2 \geq \lambda^* \Phi_\xi^2 - \\ & f''(U + \theta(u_+ - U)) \delta |u_+ - u_-| \Phi_\xi^2 \end{aligned} \quad (41)$$

当 $p \geq 1$ 时, 由于 $f(U)$ 是 U 的多项式, 在包含 $[u_+, u_-]$ 的较大闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上连续、可微, 可设在 I 上 $|f(U)|, |f'(U)|, |f''(U)|, |f'''(U)| \leq C_f$. 则不妨取 $|u_+ - u_-| < \frac{\lambda^*}{2\delta C_f}$, 则式 (41) 可以化为

$$-(\varepsilon + \delta f'(U))\Phi_{\xi}^2 > \lambda^* \Phi_{\xi}^2 - f''(U + \theta(u_+ - U))\delta \frac{\lambda^*}{2\delta C_f} \Phi_{\xi}^2 > \frac{\lambda^*}{2} \Phi_{\xi}^2 \quad (42)$$

将式(42)代入式(40), 可得

$$\left\{ \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{\xi}^2 \right\}_t + \frac{\lambda^*}{2} \Phi_{\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi}^2 - \frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi^2 + \{Q_1 - Q_2\}_{\xi} \leq \Phi F(U, \Phi_{\xi}) - \delta \Phi_{\xi} F(U, \Phi_{\xi}) \quad (43)$$

将式(43)在 $[0, t] \times \mathbb{R}$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Phi\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\lambda^*}{2} \Phi_{\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi}^2 - \frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi^2 \right) d\xi d\tau \leq \\ & \frac{1}{2} \|\Phi_0\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\Phi F(U, \Phi_{\xi}) - \delta \Phi_{\xi} F(U, \Phi_{\xi})) d\xi d\tau \end{aligned}$$

由于 $U > 0$, $U_{\xi} < 0$, 易知 $-\frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi^2 > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Phi\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{\xi}\|^2 + \int_0^t \left(\frac{\lambda^*}{2} \|\Phi_{\xi}\|^2 + \delta \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \\ & \frac{1}{2} \|\Phi_0\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|\Phi F(U, \Phi_{\xi})| + |\delta \Phi_{\xi} F(U, \Phi_{\xi})|) d\xi d\tau \quad (44) \end{aligned}$$

b. 高阶先验估计。

将式(31)线性化, 有

$$\begin{aligned} & \Phi_{t\xi} - c \Phi_{\xi\xi} + (\varepsilon + \delta c) \Phi_{\xi\xi\xi} - \delta \Phi_{t\xi\xi} + \\ & \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + f'(U) \Phi_{\xi\xi} = G \end{aligned} \quad (45)$$

其中,

$$G = [f'(U) - f'(U + \Phi_{\xi})] U_{\xi} - [f'(U + \Phi_{\xi}) - f'(U)] \Phi_{\xi\xi}$$

(a) 用 Φ_{ξ} 乘以式(45), 有

$$\begin{aligned} & \Phi_{\xi} \Phi_{t\xi} - c \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi} + (\varepsilon + \delta c) \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi\xi} - \delta \Phi_{\xi} \Phi_{t\xi\xi} + \\ & + \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + f'(U) \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi} = \Phi_{\xi} G \end{aligned} \quad (46)$$

类似于式(37)的分析, 式(46)可以改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\Phi_{\xi}^2)_t - (\varepsilon + c\delta) (\Phi_{\xi\xi}^2) + \delta \Phi_{t\xi} \Phi_{\xi\xi} - \\ & \frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi_{\xi}^2 + \{Q_3\}_{\xi} = \Phi_{\xi} G \end{aligned} \quad (47)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_3 = & -\frac{c}{2} \Phi_{\xi}^2 - \delta \Phi_{\xi} \Phi_{t\xi} + (\varepsilon + c\delta) \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi\xi} - \\ & \frac{1}{2} (\Phi_{\xi\xi}^2) + \frac{1}{2} f'(U) \Phi_{\xi}^2 \end{aligned}$$

(b) 用 $\delta \Phi_{\xi\xi}$ 乘以式(45), 则可得

$$\begin{aligned} & \delta \Phi_{\xi\xi} \Phi_{t\xi} - c \delta \Phi_{\xi\xi}^2 + \delta (\varepsilon + \delta c) \Phi_{\xi\xi} \Phi_{\xi\xi\xi} - \delta^2 \Phi_{\xi\xi} \Phi_{t\xi\xi} + \\ & + \delta \Phi_{\xi\xi} \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \delta f'(U) \Phi_{\xi\xi}^2 = \delta \Phi_{\xi\xi} G \end{aligned}$$

上式可以化为

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta^2}{2} (\Phi_{\xi\xi}^2)_t + \delta \Phi_{\xi\xi} \Phi_{t\xi} + (\delta f'(U) - c\delta) \Phi_{\xi\xi}^2 - \\ & \delta \Phi_{\xi\xi\xi}^2 + \{Q_5\}_{\xi} = \delta \Phi_{\xi\xi} G \end{aligned} \quad (48)$$

其中,

$$Q_4 = \frac{1}{2} \delta (\varepsilon + c\delta) \Phi_{\xi\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi} \Phi_{\xi\xi\xi}$$

将式(47)减去式(48), 可得

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \Phi_{\xi}^2 + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 \right\}_t - (\varepsilon + \delta f'(U)) \Phi_{\xi\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi\xi}^2 - \\ & \frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi_{\xi}^2 + \{Q_3 - Q_4\}_{\xi} = \\ & \Phi_{\xi} G - \delta \Phi_{\xi\xi} G \end{aligned} \quad (49)$$

根据低阶估计式(42), 则有

$$-(\varepsilon + \delta f'(U)) > \frac{\lambda^*}{2} \quad (50)$$

将式(50)代入式(49)中, 有

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \Phi_{\xi}^2 + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 \right\}_t + \frac{\lambda^*}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi\xi}^2 - \\ & \frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi_{\xi}^2 + \{Q_3 - Q_4\}_{\xi} \leq \\ & \Phi_{\xi} G - \delta \Phi_{\xi\xi} G \end{aligned} \quad (51)$$

由于 $U > 0$, $U_{\xi} < 0$, 易知 $-\frac{1}{2} f''(U) U_{\xi} \Phi^2 > 0$,

因此, 式(51)可化为

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \Phi_{\xi}^2 + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 \right\}_t + \frac{\lambda^*}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 + \delta \Phi_{\xi\xi\xi}^2 + \\ & \{Q_3 - Q_4\}_{\xi} \leq \Phi_{\xi} G - \delta \Phi_{\xi\xi} G \end{aligned} \quad (52)$$

将式(52)在 $[0, t] \times \mathbb{R}$ 积分, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Phi_{\xi}\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \int_0^t \left(\frac{\lambda^*}{2} \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \delta \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \\ & \frac{1}{2} \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{0\xi\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\Phi_{\xi} G - \delta \Phi_{\xi\xi} G) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (53)$$

将式(53)和式(44)相加, 可知存在常数 C_2 , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Phi\|^2 + \left(\frac{\delta^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \|\Phi_{\xi}\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \left(\frac{\lambda^*}{2} \|\Phi_{\xi}\|^2 + \left(\delta + \frac{\lambda^*}{2} \right) \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \delta \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \\ & \frac{C_2}{2} \left\{ \|\Phi_0\|^2 + (\delta^2 + 1) \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \delta^2 \|\Phi_{0\xi\xi}\|^2 + \right. \\ & \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|\Phi F(U, \Phi_{\xi})| + |\delta \Phi_{\xi} F(U, \Phi_{\xi})| + \right. \\ & \left. |\Phi_{\xi} G| + |\delta \Phi_{\xi\xi} G|) d\xi d\tau \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

当 $p \geq 1$ 时, 由于 $f(U)$ 是 U 的多项式, 在包含 $[u_+, u_-]$ 的较大闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上连续、可微, 可设在 I 上 $|f(U)|, |f'(U)|, |f''(U)|, |f'''(U)| \leq C_h$. 于是运用性质 3 和 Young 不等式对式 (54) 右端积分中的 4 项有下列估计:

$$\begin{aligned} F(U, \Phi_\xi) &= -(f(U + \Phi_\xi) - f(U)) + f'(U) \Phi_\xi = \\ &= -f'(U + \theta \Phi_\xi) \Phi_\xi + f'(U) \Phi_\xi = \\ &= -f''(U + \eta \theta \Phi_\xi) \theta \Phi_\xi^2, \quad 0 < \eta, \theta < 1 \end{aligned}$$

有

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi F(U, \Phi_\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} -f''(U + \eta \theta \Phi_\xi) \theta \Phi \Phi_\xi^2 d\xi$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Phi F(U, \Phi_\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} |\Phi| |f''(U + \eta \theta \Phi_\xi)| \Phi_\xi^2 d\xi \leq \\ &\leq C_3 N(t) \int_{\mathbb{R}} \Phi_\xi^2 d\xi \leq C_3 N(t) \|\Phi_\xi\|^2 \end{aligned} \quad (55)$$

运用 Gagliardo-Nirenberg 不等式^[28]的一维情形 $\|\Phi_\xi\|_{L^\infty} \leq C \|\Phi_\xi\|_2^{\frac{1}{2}} \|\Phi_{\xi\xi}\|_2^{\frac{1}{2}}$, 以及 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_\xi F(U, \Phi_\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} |f''(U + \eta \theta \Phi_\xi) \Phi_\xi| \Phi_\xi^2 d\xi \leq \\ &\leq C_4 N(t) \int_{\mathbb{R}} \Phi_\xi^2 d\xi \leq C_4 N(t) \|\Phi_\xi\|^2 \end{aligned} \quad (56)$$

再考察 $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\xi G| d\xi$, 因为,

$$\begin{aligned} G = F_\xi &= -\{f'(U + \Phi_\xi)(U_\xi + \Phi_{\xi\xi}) - f'(U) U_\xi - \\ &= f'(U) \Phi_{\xi\xi} - f''(U) U_\xi \Phi_\xi\} = \\ &= -\{f''(U + \theta \Phi_\xi) U_\xi \Phi_\xi + f''(U + \theta \Phi_\xi) \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} - \\ &= f''(U) U_\xi \Phi_\xi\}, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

类似于式 (56) 的证明, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f''(U + \theta \Phi_\xi) U_\xi \Phi_\xi^2| d\xi &\leq C_5 N(t) |u_- - u_+| \|\Phi_\xi\|^2 \\ \int_{\mathbb{R}} |f''(U + \theta \Phi_\xi) \Phi_\xi \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi}| d\xi &\leq C_5 N(t) \int_{\mathbb{R}} \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} d\xi \leq \\ &\leq C_6 N(t) (\eta_2 \|\Phi_\xi\|^2 + C(\eta_2) \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) \\ \int_{\mathbb{R}} |-f''(U) U_\xi \Phi_\xi^2| d\xi &\leq C_h |u_- - u_+| \|\Phi_\xi\|^2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_\xi G| d\xi &\leq C_7 N(t) (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) + \\ &+ C_8 |u_- - u_+| \|\Phi_\xi\|^2 \end{aligned} \quad (57)$$

类似地, 可推得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_{\xi\xi} G_\xi| d\xi &\leq C_9 N(t) (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) + \\ &+ C_{10} |u_- - u_+| (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) \end{aligned} \quad (58)$$

综合不等式 (55)~(58), 对式 (54) 右端有下列估计:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|\Phi F(U, \Phi_\xi)| + |\delta \Phi_\xi F(U, \Phi_\xi)| + |\Phi_\xi G| + |\delta \Phi_{\xi\xi} G|) \cdot \\ d\xi d\tau \leq C_{11} N(t) \int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau + \\ C_{12} |u_- - u_+| \int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

将式 (59) 代入式 (54), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|\Phi\|^2 + (\delta^2 + 1) \|\Phi_\xi\|^2 + \delta^2 \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) + \\ \int_0^t \left(\frac{\lambda^*}{2} \|\Phi_\xi\|^2 + \left(\delta + \frac{\lambda^*}{2} \right) \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \delta \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \\ \frac{C_2}{2} \{ \|\Phi_0\|^2 + (\delta^2 + 1) \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \delta^2 \|\Phi_{0\xi\xi}\|^2 \} + \\ \frac{1}{2} C_2 C_{11} N(t) \int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau + \\ \frac{1}{2} C_2 C_{12} |u_- - u_+| \int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \end{aligned}$$

在上式中利用先验假设式 (35), 并取 μ_2 和 γ_2 适当小, 使得 $\frac{1}{2} C_2 (C_{11} \gamma_2 + C_{12} \mu_2) < \frac{1}{2} \lambda^*$, 则当 $|u_- - u_+| \leq \mu_2, N(t) \leq \gamma_2$ 时, 先验估计式 (36) 成立, 从而命题 4 成立。

现在已经得到了初值问题 (32) 和问题 (34) 的解的局部存在性和一致先验估计。在此基础上, 通过连续性讨论来证明定理 5。

定理 5 的证明 令 $\gamma_1 = \min \left\{ \frac{\gamma_2}{\sqrt{C_1}}, \frac{\gamma_2}{\sqrt{(C_1+1)C_2}} \right\}$, 根据定理 5 的条件及 γ_1 的定义可知, $N_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_0$, 从而满足局部存在性命题 3 的条件。根据命题 3 的结论, 得到存在 $T_0 > 0$, 使得当 $t \in [0, T_0]$ 时, $N(t) \leq \sqrt{C_1} N_0$. 又因为 $N_0 \leq \gamma_1$, 所以, $N(t) \leq \sqrt{C_1} N_0 \leq \sqrt{C_1} \gamma_1 \leq \gamma_2$, 从而满足先验估计命题 4 的条件。根据命题 4 的结论, 得到在 $[0, T_0]$ 上, 有 $N(t) \leq \sqrt{C_2} N_0$. 又因为 $N_0 \leq \gamma_1$, 所以, $N(t) \leq \sqrt{C_1} N_0 \leq \sqrt{C_2} \gamma_1 \leq \frac{\gamma_2}{\sqrt{C_1+1}} \leq \gamma_2 \leq \gamma_0, t \in [0, T_0]$. 特别地, 当 $t = T_0$ 时, 有 $N(T_0) \leq \gamma_0$, 满足局部存在性命题 3 的条件。将 $t = T_0$ 作为新的初始情况, 根据命题 3, 存在 $T_0 > 0$, 使得当 $t \in [T_0, 2T_0]$ 时, $N(t) \leq \sqrt{C_1} N_0$, 所以, $N(t) \leq \sqrt{C_1} N_0 \leq \sqrt{C_1} \gamma_1 \leq \gamma_2$, 从而又一次满足先验估计 (命题 4) 的条件。根据命题 4 的结论, 得到在 $[T_0, 2T_0]$ 上, 有 $N(t) \leq \sqrt{C_2} N_0$. 又因为 $N_0 \leq \gamma_1$, 所以, $N(t) \leq \sqrt{C_2} N_0 \leq \sqrt{C_2} \gamma_1 \leq \frac{\gamma_2}{\sqrt{C_1+1}} \leq \gamma_2 \leq \gamma_0, t \in [T_0, 2T_0]$. 然后将 $t = 2T_0$ 作为新的初始情况, 继续进行下去, 可以将时间延拓到 $+\infty$. 从而定理 5 得证。

现给出定理 4 的证明。

定理 4 的证明 a. 根据定理 5 中得到的初值问

题 (32) 和问题 (34) 的解在 $X(0, +\infty)$ 的整体存在性。因为 $\Phi \in X(0, \infty) = \{\Phi \in L^\infty(0, \infty; H^2), \Phi_\xi \in L^2(0, \infty; H^2)\}$, 又由式 (33) 可推知 $\Phi_t \in L^\infty(0, \infty; L^2)$, 于是, 根据文献 [23] 中的引理 2.6 可推知

$$\Phi \in X(0, \infty) = \{\Phi \in C^0(0, \infty; H^2), \Phi_\xi \in L^2(0, \infty; H^2)\}$$

由此可知: (a) $\Phi_\xi \in L^2(0, \infty; H^2)$, 即 $\psi \in L^2(0, \infty; H^2)$; (b) $\Phi \in C^0(0, \infty; H^2)$, 从而 $\Phi_\xi \in C^0(0, \infty; H^1)$, 即 $\psi \in C^0(0, \infty; H^1)$ 。故有 $\Phi_\xi \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2)$, 即 $u - U = \psi \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2)$ 。故定理 4 中式 (28) 得证。

b. 由式 (36) 可知, $\Phi_{\xi H^1}$ 关于 t 连续, $\int_0^{+\infty} \|\Phi_\xi\|_{H^2}^2 d\tau$ 存在, 可以推出

$$\int_0^t (\|\Phi_\xi\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2) d\tau \leq C_2 N_0^2$$

则对任意的 $t > 0$, 有

$$\int_0^t \|\Phi_\xi\|_{H^2}^2 d\tau \leq C_2 N_0^2$$

由于被积函数非负, 可知 $\Phi_{\xi H^2}^2$ 关于 t 在 $[0, \infty)$ 上可积, 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_\xi(t)\|_{H^2}^2 = 0 \quad (60)$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式 [28] 于一维情形, 有

$$\|\Phi_\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|\Phi_\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\Phi_{\xi\xi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}$$

由此据式 (60) 即可推得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(x - ct)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

故定理 4 得证。

通过以上对定理 4 的证明, 可得出广义河床流体模型方程 (1) 的单调递减扭状孤波解具有渐近稳定性。

参考文献:

- [1] GANSER G H, DREW D A. Nonlinear periodic waves in a two-phase flow model[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1987, 47(4): 726–736.
- [2] GANSER G H, DREW D A. Nonlinear stability analysis of a uniformly fluidized bed[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 1990, 16(3): 447–460.
- [3] ABIA L, CHRISTIE I, SANZ-SERNA J M. Stability of schemes for the numerical treatment of an equation modelling fluidized beds[J]. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1989, 23(2): 191–204.
- [4] LÓPEZ-MARCOS J C, SANZ-SERNA J M. A definition of stability for nonlinear problems[M]//STREHMEL K. *Numerical Treatment of Differential Equations*. Leipzig: B. G. Teubner, 1988: 216–226.
- [5] 冯民富, 明平兵. 河床流体模型方程的稳定化有限差分法及非线性稳定性分析[J]. *高等学校计算数学学报*, 1997, 19(4): 298–311.
- [6] KORTEWEG D J, DE VRIES G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. *Philosophical Magazine*, 2011, 91(6): 1007–1028.
- [7] BONA J L, SCHONBEK M E. Travelling-wave solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1985, 101(3/4): 207–226.
- [8] CANOSA J, GAZDAG J. The Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, 23(4): 393–403.
- [9] DEMIRAY H. A note on the exact travelling wave solution to the KdV-Burgers equation[J]. *Wave Motion*, 2003, 38(4): 367–369.
- [10] FENG Z S. The first-integral method to study the Burgers-Korteweg-de Vries equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, 35(2): 343–349.
- [11] GUAN K Y, GAO G. Qualitative research of traveling wave solution of mixed Burgers-KdV equation[J]. *Acta Scientia Sinica*, 1987, 17(1): 64–73.
- [12] XIONG S L. An analytic solution of Burgers-KdV equation[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1989, 34(14): 1158–1162.
- [13] BIKBAEV R F. Shock waves in the modified Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 1995, 5(1): 1–10.
- [14] JACOBS D, MCKINNEY B, SHEARER M. Traveling wave solutions of the modified Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 1995, 116(2): 448–467.
- [15] FENG Z S. On traveling wave solutions to modified Burgers-Korteweg-de Vries equation[J]. *Physics Letters A*, 2003, 318(6): 522–525.
- [16] BEKIR A. On traveling wave solutions to combined KdV-mKdV equation and modified Burgers-KdV equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(4): 1038–1042.
- [17] ZHANG W G, BIAN L Y, ZHAO Y. Qualitative analysis and solutions of bounded travelling waves for the fluidized-bed modelling equation[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 2010, 140(2): 241–257.

- [18] PEGO R L. Remarks on the stability of shock profiles for conservation laws with dissipation[J]. [Transactions of the American Mathematical Society](#), 1985, 291(1): 353–361.
- [19] NEMYTSKII V V, STEPANOV V V. Qualitative theory of differential equations[M]. New York: Dover Publications, 1989.
- [20] ZHANG Z F, DING T R, HUANG W Z, et al. Qualitative theory of differential equations[M]. Providence: American Mathematical Society, 1992.
- [21] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [22] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics[J]. [Advances in Mathematics](#), 1978, 30(1): 33–76.
- [23] FIFE P C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1979.
- [24] YE Q X, LI Z Y. Introduction to reaction diffusion equations[M]. Beijing: Science Press, 1990.
- [25] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. [International Journal for Numerical Methods in Engineering](#), 1994, 37(2): 229–256.
- [26] KAWASHIMA S. Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics[D]. Kyoto: Kyoto University, 1984.
- [27] DIAZ J B, METCALF F T. An analytic proof of Young's inequality[J]. [The American Mathematical Monthly](#), 1970, 77(6): 603–609.
- [28] EVANS L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. Berkeley: American Mathematical Society, 2010.

(编辑: 石 瑛)

[上接第 476 页]

采用脉冲叠加直流的方式激励辉光放电所需的击穿电压既比脉冲电压辉光放电所需的击穿电压要低, 更易产生辉光放电, 也改善了直流辉光放电发热严重的问题, 提高了效率。另外, 在不改变脉冲电源参数的情况下, 增加直流维持电压, 辉光放电所需要的脉冲击穿电压也有所降低, 最低约为 400 V。

参考文献:

- [1] 李定, 陈银华, 马锦秀. 等离子体物理学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 菅井秀郎. 等离子体电子工程学 [M]. 张海波, 张丹, 译. 北京: 科学出版社, 2002.
- [3] DING W D, LI F, YANG L J. Atmospheric-pressure glow discharge sustained by a resonant power supply[J]. [IEEE Transactions on Plasma Science](#), 2009, 37(11): 2207–2212.
- [4] GODYAK V A, PIEJAK R B, ALEXANDROVICH B M. Measurement of electron energy distribution in low-pressure RF discharges[J]. [Plasma Sources Science and Technology](#), 1992, 1(1): 36–58.
- [5] HECHLEF B, BOUCHIKHI A. Identification of the normal and abnormal glow discharge modes in a neon-xenon gas mixture at low pressure[J]. [Plasma Science and Technology](#), 2018, 20(11): 115401.
- [6] YU Q, DENG Y F, LIU Y, et al. Numerical study on characteristics of argon radio-frequency glow discharge with varying gas pressure[J]. [Chinese Physics Letters](#), 2008, 25(7): 2569–2572.
- [7] HAN Q H, WU C Y, GUO Y, et al. Temporal evolution of atmospheric cascade glow discharge with pulsed discharge and radio frequency discharge[J]. [Plasma Science and Technology](#), 2020, 22(3): 034014.
- [8] GAO S, FENG J Y, LI W Q, et al. DC radial glow discharge in axial magnetic field at low pressures[J]. [The European Physical Journal Applied Physics](#), 2019, 88(3): 30801.
- [9] 许根慧, 姜恩永, 盛京, 等. 等离子体技术与应用 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2006.
- [10] 苏永飞, 李占贤, 张钧尧. 实现低气压射频辉光放电的电极设计及实验研究 [J]. [机械工程与自动化](#), 2020(1): 24–25, 28.
- [11] 张希霞. 低气压针板电极中频放电的实验诊断研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2020.
- [12] 焦俊凯, 周全, 王豪, 等. 大气压射频辉光放电电子数密度解析解及等离子体阻抗特性研究 [J]. [高电压技术](#), 2020, 46(4): 1458–1464.

(编辑: 董 伟)