

涉及导曲线与分担超平面的正规规定则

范楚君, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院 上海 200093)

摘要: 基于值分布和正规族理论以及高等代数相关知识, 研究了全纯曲线族及其导曲线分担处于 t 次一般位置的超平面的正规规定则。设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面, $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \dots, a_{\ell N})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$, $t \geq N$ 。假定对任意的 $f \in \mathcal{F}$ 满足条件: 若 $f(z) \in H_\ell$, 则 $\nabla f(z) \in H_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$; 若 $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^{3t+1} H_\ell$, 则 $\frac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $\delta \in (0, 1)$ 且为常数。那么, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。对于 $N=3$, $t=3, 4, 5$ 的特殊情形, 本文有效降低了所分担超平面的个数。

关键词: 正规族; 全纯曲线; t 次一般位置; 导曲线; 分担超平面

中图分类号: O 174.56 **文献标志码:** A

Normal criteria relating to derived curves and shared hyperplanes

FAN Chujun, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on the theories of value distribution, normal family and the knowledge of advanced algebra, the normal criteria for the holomorphic curves and their derived curves sharing hyperplanes located in t -subgeneral position was studied. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic curves of a domain $D \subset \mathbb{C}$ to $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\}$ be hyperplanes in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ located in t -subgeneral position, where $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \dots, a_{\ell N})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$, $t \geq N$. Assume the following conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$: If $f(z) \in H_\ell$, then $\nabla f(z) \in H_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$; If $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^{3t+1} H_\ell$, then $\frac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, where $\delta \in (0, 1)$ is a constant. Then $\mathcal{F}$ is normal on D . For the special case of $N=3$ and $t=3, 4, 5$, the number of shared hyperplanes can be effectively reduced through this research.

Keywords: normal family; holomorphic curves; t -subgeneral position; derived curves; shared hyperplanes

1 问题的提出

正规族理论的核心问题是关于正规定则的研究, 其发展主要分为两大板块: 一是亚纯函数正规族的研究, 这方面的主要方法有 Zalcman 引理以及涉及导数的 Pang-Zalcman 引理; 二是关于一般复流形间全纯映射族的正规定则。

2015 年, Ye 等^[1]考虑全纯曲线 f 与其导曲线 $\nabla f(z)$ “强分担”超平面的情形, 证明了定理 1。

定理 1 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D; \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_1, H_2, \dots, H_{2N+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的 $2N+1$ 个处于一般位置的超平面, δ 是一个实数, $0 < \delta < 1$ 。若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 满足以下条件:

a. $f(z)$ 与 $\nabla f(z)$ 在 D 上 “强分担” H_j , 其中, $j = 1, 2, \dots, 2N+1$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{j=1}^{2N+1} H_j$, 那么, $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 是一个坐标超平面。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

“强分担”超平面 H , 不仅要求 $f^{-1}(H) = \nabla f^{-1}(H)$, 更要求在满足 $f^{-1}(H) = \nabla f^{-1}(H)$ 的那些点上有 $f(z) = \nabla f(z)$ 。

2020 年, 刘晓俊等^[2]减弱条件 “强分担” 并对超平面的第一系数作非零的限制, 得到了定理 2。

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_j = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_j \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_j = (a_{j0}, \dots, a_{jN})^T$ 且 $a_{j0} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, 2N+1$ 。若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 满足以下条件:

a. 若 $f(z) \in H_j$, 则 $\nabla f(z) \in H_j$, 其中, $j = 1, 2, \dots, 2N+1$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{j=1}^{2N+1} H_j$, 那么, $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $H_0 = \{x_0 = 0\}$, $0 < \delta < 1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

问题 若去掉 “超平面第一系数非零” 这个限制条件, 结论是否仍旧成立。

在增加超平面的个数后, 对于一般的超平面, 得到了定理 3。

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面, 其中, $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \dots, a_{\ell N})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$, $t \geq N$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 。若对任意的 $f \in$

$\mathcal{F}$, 有:

a. 若 $f(z) \in H_\ell$, 则 $\nabla f(z) \in H_\ell$, 其中, $\ell = 1, 2, \dots, 3t+1$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^{3t+1} H_\ell$, 则 $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1$ 是一个常数, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

当 $t = N$, 即 H_ℓ 处于一般位置时, 所需分担的超平面个数为 $3N+1$ 。

显然, 上述结果中超平面个数过多, 能否适当减少超平面个数而使结论仍然成立? 当 $N=2$ 时, Liu 等^[3]证明了定理 4。

定理 4 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\} \neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, a_{\ell 2})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 5$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 。若对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有:

a. $f(z) \in H_\ell$ 当且仅当 $\nabla f(z) \in H_\ell$, 其中, $\ell = 1, 2, \dots, 5$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^5 H_\ell$, 那么, $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

遗憾的是, 文献 [3] 中的证明方法不能推广至 $N \geq 3$ 的情况。随后, 郑晓杰等^[4]得到了定理 5。

定理 5 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\} \neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, a_{\ell 3})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 8$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 。若对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有:

a. $f(z) \in H_\ell$ 当且仅当 $\nabla f(z) \in H_\ell$, 其中, $\ell = 1, 2, \dots, 8$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^8 H_\ell$, 那么, $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中 $0 < \delta < 1$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

本文继续研究上述问题, 得出: 当 $N=3$, 超平面处于 t 次一般位置, $t=3, 4, 5$ 时, 结论仍然成立, 即定理 6。

定理 6 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\} \neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面, 其中, $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, a_{\ell 3})^T$, $\ell = 1, 2, \dots, 2t+3$, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 。若对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有:

a. $f(z) \in H_\ell$ 当且仅当 $\nabla f(z) \in H_\ell$, 其中, $\ell = 1, 2, \dots, 2t+3$;

b. 若 $f(z) \in \bigcup_{\ell=1}^{2t+3} H_\ell$, 则 $\frac{| \langle f(z), H_0 \rangle |}{\|f(z)\| \cdot \|H_0\|} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1$ 是一个常数。

则当 $t = 3, 4, 5$ 时, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

定理 6 是对定理 4 和定理 5 结果的进一步推广。

事实上, 对于 $N = 3$ 而言, 当 $t = 3$, 即超平面处于一般位置时, 只须要求 $2t + 2 = 8$ 个超平面即可。

2 定义与符号

先介绍 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 相关的定义与符号^[5]。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} / \sim$ 是 N 维复射影空间。对任意 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ 当且仅当存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $(x_0, x_1, \dots, x_N) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_N)$ 。 $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ 的等价类记作 $[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_N]$, 则

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \{[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_N] : \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}\}$$

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上可引入一个自然的度量, 即对于点 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 之间的距离, 采用 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中 2 个圆 γ 和 γ' 之间的欧几里得距离来表示, 其中, γ 和 γ' 分别代表在球面 S^{2N+1} 上的这 2 个点 (这里取 $|\omega| = |\omega'| = 1$)。简单计算可得

$$\rho^2([\omega], [\omega']) = \min_{\theta, \theta'} \left| \omega e^{i\theta} - \omega' e^{i\theta'} \right|^2 = \min_{\theta, \theta'} 2 \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left[(\omega, \omega') e^{i(\theta - \theta')} \right] \right\} = 2 \left(1 - |(\omega, \omega')| \right)$$

对于一般的 ω, ω' ,

$$\rho^2([\omega], [\omega']) = 2 \left(1 - \frac{|(\omega, \omega')|}{|\omega||\omega'|} \right)$$

再假设 $\omega' = \omega + d\omega$, 并舍去关于 $|d\omega|$ 的二阶以上的小量, 得到相应的度量形式:

$$ds^2 = \frac{(\omega, \omega)(d\omega, d\omega) - (\omega, d\omega)(d\omega, \omega)}{(\omega, \omega)^2}$$

称这个度量为富比尼-施图迪 (Fubini-Study) 度量, 它是 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的球面度量在高维复射影空间中的推广。特别地, 当 $N = 1$ 时, 引进局部坐标 $z = \frac{\omega_1}{\omega_0}$, 此时,

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

其次, 设 $f : D \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是全纯曲线, U 是 D 的开子集。任意在 U 内满足 $\mathbb{P}(\tilde{f}(z)) \equiv f(z)$ 的全纯曲线

$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ 称作 f 在 U 上的既约表示, 其中, $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是典型的商映射。

定义 1 设 $U \subset D$ 是开集, 若 $f_0, f_1, \dots, f_N$ 在 U 内全纯且没有公共零点, 则称 $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ 是 f 的一个既约表示。

设 $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0\}$ 是一个超平面, 记 $\|H\| = \|\boldsymbol{\alpha}\| = \max_{0 \leq i \leq N} |a_i|$ 。本文仅考虑满足 $\|H\| = 1$ 的标准化超平面。

对全纯曲线 f 的任何一个既约表示 $\tilde{f}$, 定义全纯函数

$$\langle f(z), H \rangle = \langle \tilde{f}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \sum_{i=0}^N a_i f_i(z)$$

再取

$$\|f\| = \|\tilde{f}\| = \left\{ \sum_{i=0}^N |f_i(z)|^2 \right\}^{1/2}$$

定义 2 设 $f = [f_0 : f_1 : \dots : f_N] : D \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个全纯曲线, $z \in D$, 再设 $\tilde{f}$ 是 f 在 z 处的任何一个既约表示, 记

$$f^\#(z) = \frac{|f \wedge f'|}{\|f\|^2} = \frac{\sqrt{\sum_{0 \leq i < j \leq N} |f_i f'_j - f_j f'_i|^2}}{\sum_{i=0}^N |f_i|^2}$$

是 f 在 z 处的 Fubini-Study 导数, 简记为 F-S 导数, 其中, $\tilde{f}' = (\tilde{f}'_0, \tilde{f}'_1, \dots, \tilde{f}'_N)$ 。

当 $N = 1$ 时, 则 $f = \frac{f_1}{f_0} = [f_0 : f_1] : D \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 是亚纯函数, 此时,

$$f^\#(z) = \frac{|f'_1 f_0 - f_0' f_1|}{|f_0|^2 + |f_1|^2} = \frac{\left| \left(\frac{f_1}{f_0} \right)' \right|}{1 + \left| \frac{f_1}{f_0} \right|^2} = \frac{|f'|}{1 + |f|^2}$$

即通常意义下的球面导数。

定义 3 设 $f = [f_0 : f_1 : \dots : f_N] : D \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线, 若

$$\rho_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} < +\infty$$

其中, $T_f(r) = \int_0^{2\pi} \log \left\| \tilde{f}(re^{i\theta}) \right\| \frac{d\theta}{2\pi} - \log \|\tilde{f}(0)\|$ 是 f 的特征函数, 则称 f 是有穷级的。

设 $H_1, H_2, \dots, H_q$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超平面, 则 $H_\ell = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_\ell \rangle = a_{\ell 0} x_0 + a_{\ell 1} x_1 + \dots + a_{\ell N} x_N = 0\}$ 其中, $\boldsymbol{\alpha}_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \dots, a_{\ell N})^T$ 为非零法向量, $\ell = 1,$

2, \cdots, q.

按照文献 [6] 中关于 t 次一般位置的定义, 有定义 4.

定义 4 设 N, t, q 均为正整数, 且 $t \geq N, q \geq 2t - N + 1$. 称超平面 $H_1, H_2, \cdots, H_q \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 处于 t 次一般位置, 当且仅当对任意集合 $P \subseteq \{1, 2, \cdots, q\}, \#P = t + 1$, 存在单射 $\mu: \{0, 1, \cdots, N\} \rightarrow P$, 使得 $H_{\mu(0)}, \cdots, H_{\mu(N)}$ 处于一般位置. $\#P$ 表示集合 P 中元素的个数是 $t + 1$ 个.

而对于超曲面的情形, 有定义 5.

定义 5^[7] 设 $M \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个非空闭子集, t 是一个正整数, $Q_1, Q_2, \cdots, Q_q$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中 $q (\geq t + 1)$ 个超曲面, 称它们关于 M 处于 t 次一般位置, 如果对任意 $\{i_0, i_1, \cdots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \cdots, q\}$, 有

$$M \cap \left(\bigcap_{j=i_0}^{i_t} H_j \right) = \emptyset$$

特别地, 当 $M = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 时, 即超平面关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 处于 t 次一般位置, 简称为处于 t 次一般位置. 同时, 当 $t = N$ 时, 称为处于一般位置.

按照文献 [1] 中关于导曲线的定义, 有定义 6.

定义 6 设 f 是从 D 映射到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $\tilde{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 是 f 在 D 上的任意一个满足 $f_\mu(z) \neq 0$ 的既约表示, $\mu \in \{1, 2, \cdots, N\}$, 则

$$\nabla_\mu f(z) = \left[W(f_\mu, f_0)/d : \cdots : W(f_\mu, f_{\mu-1})/d : f_\mu^2/d : W(f_\mu, f_{\mu+1})/d : \cdots : W(f_\mu, f_N)/d \right]$$

称作 f 关于第 μ 个分量的全纯导曲线, 其中, $d(z)$ 是全纯函数, 使得 f_μ^2/d 和 $W(f_\mu, f_i)/d$ 没有公共零点, $i = 0, 1, \cdots, N; i \neq \mu$.

简单起见, 将 $\nabla_0 f$ 记作 ∇f , 显然地, 有 ∇f_μ 的定义与 f 的既约表示的选取无关. 当 $N = 1$ 时, $\nabla_0 f$ 对应的是亚纯函数 $\frac{f_1}{f_0}$ 的导数, 即 f 的导函数 f' , 而 $\nabla_1 f$ 对应的是亚纯函数 $\frac{f_0}{f_1}$ 的导数, 即 $\frac{1}{f}$ 的导函数 $\left(\frac{1}{f}\right)'$.

在证明主要定理之前, 先介绍一些常用符号. 在本文中, D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个区域, $H_0 = \{x_0 = 0\}$ 代表第一坐标超平面. 记 $g_n(\zeta) \stackrel{\zeta \in \mathbb{C}}{\underset{F-S}{\Rightarrow}} g(\zeta)$ 表示序列 $\{g_n\}$ 按照 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的 Fubini-Study 度量在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于 g .

3 主要引理

1991 年, Aladro 等^[8] 将 Zalcman 引理进行推

广, 得出结论: 由双曲区域映射到一般的 Hermite 流形上的全纯映射族仍满足 Zalcman 引理. 这为正规族理论的发展开创了新的方向.

引理 1 设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\mathbb{C}^m$ 中的双曲区域 Ω 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射. $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规当且仅当存在子列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 点列 $\{z_n\} \subset \Omega$ 满足 $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, 正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得

$$g_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在 $\mathbb{C}^m$ 上内闭一致收敛于从 $\mathbb{C}^m$ 映射到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的非常值全纯映射 $g(\xi)$.

在主要定理的证明过程中, 还需要如下的引理 2.

引理 2(Hurwitz 引理)^[2] 设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 内的一列全纯函数, $a \in \mathbb{C}$ 是任意一个复数, 且设 $f_n(z)$ 在 D 的任意一个紧子集上一致收敛于非常值的全纯函数 $f(z)$. 若存在点 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = a$, 则对于每一个充分大的 n , 方程 $f_n(z) = a$ 在 D 内有根. 此外, 存在 z_0 的某邻域 U , 使得 $f(z) - a$ 在 U 内根的总数与 $f_n(z) - a$ 在 U 内根的总数相同 (计重数).

1999 年, Eremenko 证明了一个 Picard 型定理, 即引理 3.

引理 3^[9] 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是一条全纯曲线, 其中 X 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的一个闭子集. 再设 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2t+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超曲面, 关于 X 处于 t 次一般位置. 若 f 不取 Q_i , 即 $\langle f, Q_i \rangle \neq 0, 1 \leq i \leq 2t + 1$, 则 f 必为常映射.

为了便于辅助主要定理的证明, 将引理 3 推导为引理 4.

引理 4^[7] 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线, $H_1, H_2, \cdots, H_q$ 均是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置的超平面, 其中, $q \geq 2t + 1, t \geq N$, 若对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, q\}$, f 不取 H_i , 或者 $f(\mathbb{C}) \subseteq H_i$, 则 f 必为常映射.

引理 5^[3] 设 $g = [g_0 : g_1 : \cdots : g_N]: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条有穷级的全纯曲线, 且 $g_0(\zeta) \neq 0, N \geq 2$ 是一个整数. $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 且其第一系数 $a_{\ell 0}$ 均不为零, $\ell = 1, 2, \cdots, N + 1. \tilde{g}(\zeta) = (g_0, g_1, \cdots, g_N)(\zeta)$ 是 g 的任意既约表示, 令

$$G_\ell(\zeta) = a_{\ell 0} + \sum_{i=1}^N a_{\ell i} \frac{g_i(\zeta)}{g_0(\zeta)}, \quad \ell = 1, 2, \cdots, N + 1$$

若 $G_\ell(\zeta) \neq 0$ 且 $G'_\ell(\zeta) \neq 0, \zeta \in \mathbb{C}$, 则 g 是线性退化的.

引理 6^[10] 设 $f(z)$ 为整函数, 若 $f(z)$ 的球面导数 $f^\#(z)$ 有界, 则 $f(z)$ 的级最多为 1.

4 主要定理的证明

4.1 定理3的证明

假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规,则由引理1可得,存在点列 $\{z_n\} \subset D$ 满足 $z_n \rightarrow z_0 \in D$,全纯曲线列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$,正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n \rightarrow 0^+$,使得

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow[F-S]{\zeta \in \mathbb{C}} g(\zeta)$$

其中, g 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值全纯曲线。

因为, $H_\ell, \ell = 1, 2, \dots, 3t+1$ 在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于 t 次一般位置,由 t 次一般位置的定义可得,这 $3t+1$ 个超平面中至少存在 $2t+1$ 个超平面的第一系数不为零。不失一般性,假设 $H_1, H_2, \dots, H_{2t+1}$ 的第一系数均不为零。类似于定理2的证明,可得 $g(\mathbb{C}) \subseteq H_i$ 或 $\langle g, H_i \rangle \neq 0, i = 1, 2, \dots, 2t+1$,再由引理4可知 g 为常值,矛盾。因此, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

4.2 定理6的证明

假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规,则由引理1可得,存在点列 $\{z_n\} \subset D$ 满足 $z_n \rightarrow z_0 \in D$,全纯曲线列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$,正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n \rightarrow 0^+$,使得

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow[F-S]{\zeta \in \mathbb{C}} g(\zeta) \quad (1)$$

其中, g 是 $\mathbb{C}$ 上有穷级的非常值全纯曲线。

设 $\tilde{g}(\zeta) = (g_0, g_1, g_2, g_3)(\zeta)$ 是 g 的某个既约表示。由于 H_ℓ 处于 t 次一般位置, $1 \leq \ell \leq 2t+3$,则至少存在 $t+3$ 个超平面的第一系数不为零。不失一般性,假定 $H_1, H_2, \dots, H_{t+3}$ 的第一系数均不为零。又由引理4及 g 非常值,存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, 2t+3\}$,不失一般性,假定 $i = 2t+3$,则存在某个 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$,使得 $\langle g, H_{2t+3} \rangle(\zeta_0) = 0$,但 $\langle g, H_{2t+3} \rangle(\zeta) \neq 0$ 。

类似于定理4中的证明,有如下结论:

断言 a. $g_0(\zeta_0) \neq 0$,从而 $g_0(\zeta) \neq 0$;

断言 b. H_{2t+3} 的第一系数必为零,即 $a_{2t+3} = (0, a_{2t+3,1}, a_{2t+3,2}, a_{2t+3,3})$ 。

现分为两种情况进行讨论。

情况 1 $\tilde{g}$ 线性非退化。

由断言 b,有 $\tilde{g}$ 不取 H_ℓ ,即

$$G_\ell = a_{\ell 0} + a_{\ell 1} \frac{g_1}{g_0} + a_{\ell 2} \frac{g_2}{g_0} + a_{\ell 3} \frac{g_3}{g_0} \neq 0, \ell = 1, 2, \dots, t+3$$

又由定理4的 a,有 $G_\ell'(\zeta) \neq 0, \ell = 1, 2, \dots, t+3, \zeta \in \mathbb{C}$ 。由于 H_ℓ 处于 t 次一般位置, $\ell = 1, 2, \dots, t+3$,所以,任取 $t+1$ 个超平面,存在 $N+1$ 个超平面处于一般位置。故由引理5(取 $N=3$),有 $\tilde{g}$ 线性退化,

矛盾。

情况 2 $\tilde{g}$ 线性退化。

此时,存在不全为零的数 k_0, k_1, k_2 和 k_3 ,使得

$$k_0 g_0(\zeta) + k_1 g_1(\zeta) + k_2 g_2(\zeta) + k_3 g_3(\zeta) \equiv 0$$

情况 2.1 g_0, g_1, g_2 线性无关。

此时 $k_3 \neq 0$,所以,存在常数 k, l, m ,使得

$$g_3(\zeta) = k g_2(\zeta) + l g_1(\zeta) + m g_0(\zeta)$$

由引理4的证明可知 $g_0 \neq 0$,因此,

$$\frac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)} = k \frac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)} + l \frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} + m$$

且 G_ℓ 是全纯的, $\ell = 1, 2, \dots, t+3$ 。由Zalcman引理的证明,可得 $g^\#(\zeta) \leq 1$,则存在常数 $M > 0$,使得

$$G_\ell^\#(\zeta) \leq M$$

由引理6可知, $\rho_{G_\ell} \leq 1, 1 \leq \ell \leq t+3$ 。由断言 b 可得, $G_\ell \equiv 0$ 或 $G_\ell \neq 0, \ell = 1, 2, \dots, t+3$ 。因此,当 $G_\ell \neq 0, \ell \in \{1, 2, \dots, t+3\}$ 时, $G_\ell = B_\ell e^{A_\ell \zeta}$;当 $G_\ell \equiv 0$ 时,仍旧记 $G_\ell = B_\ell e^{A_\ell \zeta}$,其中, $B_\ell = 0$ 。

任取 $j_1, j_2, \dots, j_{t+1} \in \{1, 2, \dots, t+3\}$,不失一般性,令 $j_i = i, 1 \leq i \leq t+1$,则存在某个单射 $\sigma: \{1, 2, \dots, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, t+1\}$,使得 $H_{\sigma(1)}, \dots, H_{\sigma(4)}$ 处于一般位置。从而 $\det A \neq 0$,其中,

$$A = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1),0} & a_{\sigma(2),0} & a_{\sigma(3),0} & a_{\sigma(4),0} \\ a_{\sigma(1),1} & a_{\sigma(2),1} & a_{\sigma(3),1} & a_{\sigma(4),1} \\ a_{\sigma(1),2} & a_{\sigma(2),2} & a_{\sigma(3),2} & a_{\sigma(4),2} \\ a_{\sigma(1),3} & a_{\sigma(2),3} & a_{\sigma(3),3} & a_{\sigma(4),3} \end{pmatrix}$$

设 $p_1 B_{\sigma(1)} e^{A_{\sigma(1)} \zeta} + p_2 B_{\sigma(2)} e^{A_{\sigma(2)} \zeta} + p_3 B_{\sigma(3)} e^{A_{\sigma(3)} \zeta} + p_4 B_{\sigma(4)} e^{A_{\sigma(4)} \zeta} = 0$,其中, p_1, p_2, p_3, p_4 均为常数,因此,

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = 0$$

由于 $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}$ 线性相关,所以,存在非零向量

$$(b_1, b_2, b_3, b_4)^T, \text{使得} A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \text{因此, } p_1, p_2,$$

p_3, p_4 不全为零,即 $B_{\sigma(1)} e^{A_{\sigma(1)} \zeta}, B_{\sigma(2)} e^{A_{\sigma(2)} \zeta}, B_{\sigma(3)} e^{A_{\sigma(3)} \zeta}, B_{\sigma(4)} e^{A_{\sigma(4)} \zeta}$ 线性相关。

断言 c. 存在某个单射 $\phi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\}$,使得 $B_{\phi(1)} e^{A_{\phi(1)} \zeta}, B_{\phi(2)} e^{A_{\phi(2)} \zeta}, B_{\phi(3)} e^{A_{\phi(3)} \zeta}$ 线性无关。

断言 c 的证明: 不失一般性,假设存在常数

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , 有 $B_{\sigma(4)}e^{A_{\sigma(4)}\zeta} = \ell_1 B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta} + \ell_2 B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta} + \ell_3 B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 。由于 $(B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}, B_{\sigma(4)}e^{A_{\sigma(4)}\zeta}) = \left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) \mathbf{A}$, 所以,

$$\begin{pmatrix} 1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0} \end{pmatrix} = (B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}, B_{\sigma(4)}e^{A_{\sigma(4)}\zeta}) \mathbf{A}^{-1}$$

从而 $\frac{g_j}{g_0} = \sum_{i=1}^3 c_{ij} B_{\sigma(i)}e^{A_{\sigma(i)}\zeta}$, $j = 0, 1, 2$ 。

设 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$, 则有 $\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}\right) = (B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}) \mathbf{C}$ 。若 $r(\mathbf{C}) \geq 2$, 则方程 $\mathbf{C} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ 有非零解, 因此, 存在不全为零

的常数 q_0, q_1, q_2 , 使得 $\mathbf{C} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$, 则

$$(B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}) \mathbf{C} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

即 $\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}\right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$, 因此, $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}$ 线性相关,

矛盾, 从而 $r(\mathbf{C}) = 3$ 。

若 $B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 线性相关, 则存在不全为零的常数 c_0, c_1, c_2 , 使得

$$(B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

因此, $\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}\right) \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$, 这意味着 $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}$

线性相关, 矛盾。断言 c 得证。

所以, $B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 线性无关, 这意味着 $B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, B_{\sigma(3)}$ 均不为零, 且 $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}$ 互不相等。又因为

$$(B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, \dots, B_{t+3}e^{A_{t+3}\zeta}) = \left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) \mathbf{B}$$

其中,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & \dots & a_{t+3,0} \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{t+3,1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{t+3,2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{t+3,3} \end{pmatrix}$$

而 $\text{rank} \left\{ \left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) \right\} = 3$, 因此, $\text{rank} \{(B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, \dots, B_{t+3}e^{A_{t+3}\zeta})\} \leq 3$ 。

综上所述, 任取 $P \subseteq \{B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, \dots, B_{t+3}e^{A_{t+3}\zeta}\}$,

$\#P = t+1$, 存在 P 中的 3 个元素线性无关。因此, $A_1, A_2, \dots, A_{t+3}$ 中任取 $t+1$ 个, 有且仅有 3 个不同 (当某个 $B_\ell = 0$, 此时对应的 $B_\ell e^{A_\ell\zeta}$ 必与其他的 $B_j e^{A_j\zeta}$ 线性相关, 故不考虑其 A_ℓ)。容易验证, 当 $t = 3, 4, 5$ 时, $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, \dots, B_{t+3}e^{A_{t+3}\zeta}$ 不可能满足要求, 矛盾。

情况 2.2 g_0, g_1, g_2 线性相关。

此时存在不全为零的数 p_0, p_1, p_2 , 使得 $p_0 g_0 + p_1 g_1 + p_2 g_2 = 0$ 。

a. 若 $p_2 \neq 0$, 则 g_2, g_3 可由 g_0, g_1 线性表出, 即存在常数 k_1, k_2, l_1, l_2 , 有

$$\frac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)} = k_1 \frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} + l_1, \frac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)} = k_2 \frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} + l_2 \quad (2)$$

因此,

$$\begin{aligned} G_\ell &= a_{\ell 0} + a_{\ell 1} \frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} + a_{\ell 2} \frac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)} + a_{\ell 3} \frac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)} = \\ &= (a_{\ell 1} + a_{\ell 2} k_1 + a_{\ell 3} k_2) \frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} + a_{\ell 0} + a_{\ell 2} l_1 + a_{\ell 3} l_2, \\ &\ell = 1, 2, \dots, 2t+3 \end{aligned}$$

由于 $H_1, H_2, \dots, H_{t+3}$ 处于 t 次一般位置, 所以, 由 t 次一般位置的定义, 不失一般性, 设 $\alpha_{\ell_0}, \alpha_{\ell_1}, \alpha_{\ell_2}, \alpha_{\ell_3}$ 线性无关, $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\} \subseteq \{1, 2, \dots, t+3\}$, 则必存在某个 $\ell_t \in \{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, 使得 $a_{\ell_t, 1} + a_{\ell_t, 2} k_1 + a_{\ell_t, 3} k_2 \neq 0$ 。

对于上述 ℓ_t , 若 $G_{\ell_t}' \equiv 0$, 则有 $\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \equiv 0$, 这意味着 $\frac{g_1}{g_0} \equiv c_1$, 矛盾。又由定理 4 的 a, 有

$$G_{\ell_t}' \neq 0, \left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \neq 0 \quad (3)$$

若 H_j 的第一系数均不为零, 即 $a_{j0} \neq 0$, 则由断言 b 可得, g 不取 H_j 或 $g(\mathbb{C}) \subseteq H_j$, $j = t+4, t+5, \dots, 2t+2$ 。由引理 4 可知, $\tilde{g}$ 是一个常值映射, 矛盾。因此, 至少存在 2 个 $j_i, j_k \in \{t+4, t+5, \dots, 2t+2\}$, $j_i \neq j_k$, 使得 $a_{j_i, 0} = a_{j_k, 0} = 0$, 不妨设 $j_i = 2t+1, j_k = 2t+2$ 。

又假设 H_m 的第一系数均不为零, 即 $a_{m0} \neq 0$, 则 g 不取 H_m 或 $g(\mathbb{C}) \subseteq H_m$, $m = t+4, t+5, \dots, 2t$ 。

若对任意的 $\zeta \in \mathbb{C}$, 有 $\langle \tilde{g}, \alpha_k \rangle \neq 0$ 或 $\langle \tilde{g}, \alpha_k \rangle \equiv 0$, $k = 2t+1, 2t+2, 2t+3$, 则由引理 4 可知, $\tilde{g}$ 是一个常值映射, 矛盾。因此, 存在某个 $k_i \in \{2t+1, 2t+2, 2t+3\}$, 存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\langle \tilde{g}, \alpha_{k_i} \rangle(\zeta_0) = 0$, 但 $\langle \tilde{g}, \alpha_{k_i} \rangle(\zeta) \neq 0$ 。

断言 d. $\langle \tilde{g}, \alpha_{k_i} \rangle$ 的零点 ζ_0 均是重级的, 且 ζ_0 也是 $G_{k_i}(\zeta)$ 的重级零点。

因为, $\alpha_{k_i} = (0, a_{k_i, 1}, a_{k_i, 2}, a_{k_i, 3})$, 所以,

$\langle \tilde{g}, \alpha_{k_i} \rangle(\zeta_0) = a_{k_i,1}g_1(\zeta_0) + a_{k_i,2}g_2(\zeta_0) + a_{k_i,3}g_3(\zeta_0) = 0$

由式 (2) 可得

$(a_{k_i,1} + a_{k_i,2}k_1 + a_{k_i,3}k_2)g_1(\zeta_0) + (a_{k_i,2}l_1 + a_{k_i,3}l_2)g_0(\zeta_0) = 0,$
 $G_{k_i}(\zeta_0) = 0$

即 ζ_0 也是 $G_{k_i}(\zeta)$ 的零点。

由引理 2 可知, 存在序列 $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, 使得 $\langle \tilde{g}_n, \alpha_{k_i} \rangle(\zeta_n) = 0$, 则有 $\langle \tilde{f}_n, \alpha_{k_i} \rangle(z_n + \rho_n \zeta_n) = 0$ 。由定理 6 的 a, 有 $\langle \nabla \tilde{f}_n, \alpha_{k_i} \rangle(z_n + \rho_n \zeta_n) = 0$, 所以,

$$a_{k_i,1} \left(\frac{f_{n1}}{f_{n0}} \right)' + a_{k_i,2} \left(\frac{f_{n2}}{f_{n0}} \right)' + a_{k_i,3} \left(\frac{f_{n3}}{f_{n0}} \right)' \Big|_{z_n + \rho_n \zeta_n} = 0$$

$$a_{k_i,1} \left(\frac{g_{n1}}{g_{n0}} \right)' + a_{k_i,2} \left(\frac{g_{n2}}{g_{n0}} \right)' + a_{k_i,3} \left(\frac{g_{n3}}{g_{n0}} \right)' \Big|_{\zeta_n} = 0$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 则

$$a_{k_i,1} \left(\frac{g_1}{g_0} \right)' + a_{k_i,2} \left(\frac{g_2}{g_0} \right)' + a_{k_i,3} \left(\frac{g_3}{g_0} \right)' \Big|_{\zeta_0} = 0$$

即 $G_{k_i}'(\zeta_0) = 0$ 。所以, $\langle \tilde{g}, \alpha_{k_i} \rangle(\zeta)$ 的零点都是重级的, $G_{k_i}(\zeta)$ 的零点也都是重级的。

这意味着

$$(a_{k_i,1} + a_{k_i,2}k_1 + a_{k_i,3}k_2) \left(\frac{g_1}{g_0} \right)' \Big|_{\zeta_0} = 0$$

即 $\left(\frac{g_1}{g_0} \right)'(\zeta_0) = 0$, 矛盾。因此, 至少存在 1 个 $m_i \in \{t+4, \dots, 2t\}$, 有 $a_{m_i,0} = 0$ 。不失一般性, 取 $m_i = 2t$ 。

类似地, 可证得 $a_{t+4,0}, \dots, a_{2t+3,0}$ 均为零。因此, $\langle \tilde{g}, \alpha_p \rangle$ 的零点 ζ_0 均是重级的, 且 ζ_0 也是 $G_p(\zeta)$ 的重级零点, $p = t+4, t+5, \dots, 2t+3$ 。若对所有的 $\zeta \in \mathbb{C}$, $\langle \tilde{g}, \alpha_p \rangle(\zeta) \neq 0$ 或 $\langle \tilde{g}, \alpha_p \rangle(\zeta) \equiv 0$, $p = t+4, t+5, \dots, 2t+3$, 则由引理 4 可知, 有 $\tilde{g}$ 是一个常映射, 矛盾。因此, 存在某个 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $p_j \in \{t+4, t+5, \dots, 2t+3\}$, 使得 $\langle \tilde{g}, \alpha_{p_j} \rangle(\zeta_0) = 0$, 但 $\langle \tilde{g}, \alpha_{p_j} \rangle(\zeta) \not\equiv 0$, 这意味着

$$(a_{p_j,1} + a_{p_j,2}k_1 + a_{p_j,3}k_2) \left(\frac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)} \right)' \Big|_{\zeta_0} = 0$$

矛盾。

b. 若 $p_2 = 0$, 则 p_0, p_1 不全为零。

(a) 若 $p_1 \neq 0$, 则 g_1, g_3 可由 g_0, g_2 线性表出, 类似于 a 的证明, 矛盾;

(b) 若 $p_0 \neq 0, p_1 = 0$, 而 $g_0 \neq 0$, 矛盾。

因此, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

当 $N = 3, t \geq 4$ 时, 所需超平面的个数会随着 t 值的增长而增加。目前, 仍未能找到明确的上界。

参考文献:

[1] YE Y S, PANG X C, YANG L. An extension of Schwick's theorem for normal families[J]. *Annales Polonici Mathematici*, 2015, 115(1): 23–31.

[2] 刘晓俊, 庞学诚, 杨锦华. 涉及分担超平面的正规族 [J]. *数学年刊 (A 辑)*, 2021, 42(2): 171–178.

[3] LIU X J, PANG X C. Shared hyperplanes and normal families of holomorphic curves[J]. *International Journal of Mathematics*, 2020, 31(5): 2050037.

[4] 郑晓杰, 刘晓俊. 全纯曲线正规族分担超平面 [J]. *上海理工大学学报*, 2021, 43(6): 523–527.

[5] 沙巴特 Б Б. 复分析导论: 多复变函数 [M]. 许明, 欧阳彦虹, 译. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[6] RU M. Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2001.

[7] 杨刘. 到复射影空间的全纯映射及亚纯映射的正规性和值分布 [D]. 上海: 华东师范大学, 2016.

[8] ALADRO G, KRANTZ S G. A criterion for normality in $\mathbb{C}^n$ [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991, 161(1): 1–8.

[9] EREMENKO A. A Picard type theorem for holomorphic curves[J]. *Periodica Mathematica Hungarica*, 1999, 38(1): 39–42.

[10] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

(编辑: 石 瑛)