

有向图的顶点加权 zeta 函数

杨文玲, 朱 林

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 给定一个有向图, 每个顶点赋予一个权重。对于这个有向图定义了它的顶点加权 zeta 函数, 函数的权重是由上面给定的顶点的权重诱导的有向图的圈的权重。并利用 Amitsur 恒等式和线性代数的相关知识给出了有向图的顶点加权 zeta 函数的两个行列式表达式。当有向图是对称有向图时, 已有的结果是本文结果的自然推论。最后给出了一个例子并计算出此时顶点加权 zeta 函数的具体形式。

关键词: zeta 函数; 对称有向图; 加权矩阵

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

A vertex weighted zeta function of a digraph

YANG Wenling, ZHU Lin

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Given a digraph G , a weight was assigned to each vertex. For this digraph, a vertex weighted zeta function was defined, the weight of which was associated with the weights of the cycles in G , induced by the vertex weights given above. Two determinant expressions of the vertex weighted zeta function were provided, using Amitsur identity and some techniques in linear algebra. When the digraph was symmetric, the existing results were natural corollaries of our results. Finally, an example was given and the specific form of the vertex weighted zeta function was calculated.

Keywords: zeta function; symmetric digraph; weighted matrix

1 问题的提出

所有 zeta 函数中最原始且最出名的就是 Riemann zeta 函数。在此之后, 许多数学家定义并研究了各种不同数学对象的 zeta 函数。20 世纪 60 年代, Ihara^[1] 定义了正则图上的 Ihara zeta 函数并证明了正则图的 Ihara zeta 函数的倒数是一个多项式。

Sunada^[2-3] 将正则图 G 的 zeta 函数与 G 的基本群的西表示联系起来。Bass^[4] 将 Ihara 的结果进一步推广到了非正则图, 并给出了相应的行列式表达式。Stark 等^[5] 给出了 Bass 定理的一个初等证明, 并讨论了任意图的 3 种不同类型的 zeta 函数。此外, Foata 等^[6] 和 Kotani 等^[7] 用不同的方法证明了 Bass 定理。Mizuno 等^[8-10] 逐步定义了有向图的 Ihara

收稿日期: 2021-09-02

第一作者: 杨文玲 (1996-), 女, 硕士研究生。研究方向: 代数组合。E-mail: yangwenling06@163.com

通信作者: 朱 林 (1990-), 男, 讲师。研究方向: 代数组合。E-mail: zhulin2323@163.com

zeta 函数、有向图和无向图的边加权 Ihara zeta 函数,并给出了这些 zeta 函数的行列式表达式。2007 年, Horton^[11] 讨论了有向图的 Ihara zeta 函数的相关性质。2019 年, Konno 等^[12] 通过给无向图的顶点加权, 定义了图 G 的一个新的加权 Ihara zeta 函数, 并给出了它的行列式表达式。2021 年, Zhu^[13] 定义了图 G 的一个顶点加权 Bartholdi zeta 函数, 并给出其行列式表达式。

本文定义了有向图的顶点加权 zeta 函数, 并给出了它的行列式表达式, 这一结果推广了文献 [12] 中的结果。

本文中出现的有向图都是有限的。令 G 是有向图, 其顶点集与有向边集分别用 $V(G)$ 和 $D(G)$ 表示, 其中, $|V(G)| = n$, $|D(G)| = m$ 。对于有向边 $e = (u, v) \in D(G)$, 顶点 u 称为有向边 e 的起点, 记为 $o(e)$, v 称为有向边 e 的终点, 记为 $t(e)$ 。当 $e = (u, v)$ 满足 $o(e) = t(e)$ 时, 称 $e = (u, v)$ 是一个自环。有相同起点和终点的有向边称为重边。本文研究的有向图不含自环和重边。当 $t(e) = o(f)$ 时, 称有向边 e 与 f 相邻, 再者, 若 $t(e) = o(f)$, $t(f) = o(e)$, 则称 f 是 e 的逆, 记为 $f = e^{-1}$, 反之亦然。对于 $v \in V(G)$, $\deg_G^+(v) = |\{e \in D(G) : t(e) = v\}|$ 和 $\deg_G^-(v) = |\{e \in D(G) : o(e) = v\}|$ 分别称为 v 的入度和出度。

令 $P = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 在有向图中, 如果对任意的 $i = 1, 2, \dots, r$, 有 $e_i \in D(G)$, 且对任意的 e_i , $i = 1, 2, \dots, r-1$, 有 $t(e_i) = o(e_{i+1})$, 则 $P = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 是 G 中的一条路, 并且称路 P 的长度 $|P| = r$ 。若在路 P 中存在一个 $e_i (i = 1, 2, \dots, r-1)$, 有 $e_{i+1} = e_i^{-1}$, 则称路 P 是有回路的。且对上述路 P , 若进一步有 $t(e_r) = o(e_1)$, 则称 P 为一个圈。为了方便, 本文统一用 C 表示圈。 C^s 为 C 的幂, 其中, C^s 表示 C 绕自己 s 圈。若 C 不能表示成更小圈的幂, 则 C 是素圈。

若圈 C 和 C^2 无回路, 则 C 是约化的。对圈 $C_1 = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, $C_2 = (f_1, f_2, \dots, f_r)$, 若存在正整数 k , 使得对所有的 $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, 有 $f_j = e_{j+k}$, 其中, 下标关于模 r 同余, 则 C_1 与 C_2 等价。令 $[C]$ 是包含圈 C 的等价类。

在有向图 G 中, 若 $e, e^{-1} \in D(G)$, 则称 e 是对称有向边, 否则称它是非对称有向边。令 G_1, G_2 是 G 的生成子图且 $D(G_1) = \{e \in D(G) | e^{-1} \notin D(G)\}$, $D(G_2) = \{e \in D(G) | e^{-1} \in D(G)\}$, 此时记 $G = G_1 \dot{\cup} G_2$, 并将 G_1, G_2 分别称为 G 的完全非对称部分和对称部分。若 $G = G_2$, 则称 G 是对称有向图, 注意到可以将无

向图的每条无向边视作两条互逆的有向边, 即此无向图可看作一个对称有向图。

在文献 [1] 中, 当 $u \in \mathbb{C}$ 且 $|u|$ 足够小, 图 G 的 Ihara zeta 函数定义为

$$Z(G, u) = \prod_{[C]} (1 - u^{|C|})^{-1}$$

其中, $[C]$ 跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类。

定理 1^[4] 令 G 是连通无向图, 有 n 个顶点和 m 条边, 则 G 的 Ihara zeta 函数有如下的行列式表达式:

$$Z(G, u)^{-1} = (1 - u^2)^{m-n} \det(I_n - uA(G) + u^2(D_G - I_n))$$

其中, $D_G = (d_{ij})$ 是对角矩阵, 且 $d_{ii} = \deg_G v_i$, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是图 G 的边集, $A(G) = (A_{uv})_{u, v \in V(G)}$ 是图 G 的邻接矩阵, 定义为

$$A_{uv} = \begin{cases} 1, & (u, v) \in E(G) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Foata 等^[6] 运用 Lyndon 字和 Amitsur 恒等式给出了图的 Ihara zeta 函数的行列式表达式的一个新的证明。给定一个有限全序集 X , 考虑 X 上的所有字组成的集合 X^* , 且 X^* 上有自然的字典序, 它由 X 上的全序诱导。全序集 X 中的 Lyndon 字 π 是 X^* 中的一个非空字, 满足在其循环重排类中最小且 π 不能写成更短的字幂。

令 $M_1, M_2, \dots, M_k$ 是阶数相同的方阵, L 是 $\{1, 2, \dots, k\}$ 上所有 Lyndon 字的集合。对于 L 中的每个 Lyndon 字 $\pi = i_1 i_2 \dots i_p$, 记 $M_\pi = M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_p}$, 那么, Amitsur 恒等式为^[14]

$$\det(I - (M_1 + M_2 + \dots + M_k)) = \prod_{\pi \in L} \det(I - M_\pi)$$

令 $M = (m_{ij})$ 是 $n \times n$ 阶矩阵, 且 L 是在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的所有 Lyndon 字的集合。根据 Amitsur 恒等式可得

$$\det(I - M) = \prod_{\pi \in L} (1 - m_\pi)$$

其中, $m_\pi = m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{p-1} i_p} m_{i_p i_1}$, $\pi = i_1 i_2 \dots i_p \in L$ 。

2 有向图的顶点加权 zeta 函数

设 G 是有向图, $|V(G)| = n$, $|D(G)| = m$ 。 G_1, G_2 是 G 的完全非对称部分和对称部分, 记 $|D(G_1)| = m_1, |D(G_2)| = m_2$, $t = \frac{m_2}{2}$ 。定义顶点权重函数 $\omega: V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ 。设圈 $C = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 定义 C 的权重 $\omega(C)$ 为

$$\omega(C) = \omega(t(e_1))^2 \omega(t(e_2))^2 \dots \omega(t(e_r))^2 = \prod_{i=1}^r \omega(t(e_i))^2$$

则可以定义有向图的顶点加权 zeta 函数

$$\zeta_{\omega}(G, u) = \prod_{[C]} (1 - \omega(C)u^{|C|})^{-1}$$

其中, $[C]$ 跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类。

若对于所有 $v \in V(G)$, 有 $\omega(v) = 1$, 则上面定义的顶点加权 zeta 函数就是有向图的 Ihara zeta 函数^[8]。

为了计算有向图的顶点加权 zeta 函数, 定义边邻接矩阵 $B_{m \times m}$ 和矩阵 $J_{m \times m}$ 为

$$B_{ef} = \begin{cases} \omega(t(e))^2, & t(e) = o(f) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$J_{ef} = \begin{cases} \omega(t(e))^2, & f = e^{-1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义有向图的顶点邻接矩阵 $A_{n \times n} = A(G)$ 和对角矩阵 $D_{n \times n} = D_G$ 为

$$a_{uv} = \begin{cases} 1, & (u, v) \in D(G) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$d_{uv} = \begin{cases} |\{e \in D(G_2) : t(e) = u\}|, & u = v \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定理 2 令 G 是有向图, ω 是顶点权重函数, 则 G 的顶点加权 zeta 函数有如下行列式表达式:

$$\zeta_{\omega}(G, u)^{-1} = \det(I_m - u(B - J))$$

其中, $[C]$ 跑遍 G 中约化的素圈的所有等价类。

证明 因为,

$$\det(I - M) = \prod_{\pi \in L} (1 - m_{\pi})$$

其中, $m_{\pi} = m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \cdots m_{i_{p-1} i_p} m_{i_p i_1}$, $\pi = i_1 i_2 \cdots i_p \in L$, $M = (m_{ij})$ 是 $m \times m$ 矩阵, L 是 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上所有 Lyndon 字的集合。令 $M = (m_{ij}) = B - J$, 有

$$\det(I_m - u(B - J)) = \det(I_m - uM) = \prod_{\pi \in L} (1 - u^{|\pi|} m_{\pi})$$

其中, L 表示 Lyndon 字 $\pi = i_1 i_2 \cdots i_p$ 在 $X = \{1, 2, \cdots, m\}$ 上的集合, 且 $m_{\pi} = m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \cdots m_{i_p i_1}$, 同时, 对 $\pi \in L$, 有

$$m_{\pi} = \begin{cases} \omega(C), & C = (i_1, i_2, \cdots, i_p) \text{ 是 } G \text{ 中的素圈} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此,

$$\det(I_m - u(B - J)) = \prod_{[C]} (1 - \omega(C)u^{|C|})$$

证毕。

此外, 定义矩阵 $\bar{A}_{n \times n} = \bar{A}(G) = (A_{xy})_{x, y \in V(G)}$ 和 $\bar{D}_{n \times n} = \bar{D}(G) = (\bar{d}_{xy})_{x, y \in V(G)}$ 为

$$A_{xy} = \begin{cases} \omega(x)\omega(y), & (x, y) \in D(G_1) \\ \frac{\omega(x)\omega(y)}{1 - u^2\omega(x)^2\omega(y)^2}, & (x, y) \in D(G_2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\bar{d}_{xy} = \begin{cases} \sum_{o(e)=x, e \in D(G_2)} \frac{\omega(x)^2\omega(t(e))^2}{1 - u^2\omega(x)^2\omega(t(e))^2}, & x = y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定理 3 令 G 是有向图, 有 n 个顶点和 m 条有向边, ω 是顶点权重函数。令 $D(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, e_{m_1+1}^{-1}, \cdots, e_m, e_m^{-1}\}$, 则 G 的顶点加权 zeta 函数 $\zeta_{\omega}(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$\zeta_{\omega}(G, u)^{-1} = \prod_{j=m_1+1}^{m_1+t} (1 - u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2) \cdot \det(I_n - u\bar{A} + u^2\bar{D})$$

证明 首先定义 2 个矩阵 $S_{m \times n} = (S_{ev})_{e \in D(G), v \in V(G)}$ 和 $T_{m \times n} = (T_{ev})_{e \in D(G), v \in V(G)}$:

$$S_{ev} = \begin{cases} \omega(t(e)), & t(e) = v \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$T_{ev} = \begin{cases} \omega(o(e)), & o(e) = v \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则

$$B = ST^T$$

因此,

$$\zeta_{\omega}(G, u)^{-1} = \det(I_m - u(B - J)) =$$

$$\det(I_m - u(S^T T - J)) =$$

$$\det(I_m - uS^T T(I_m + uJ)) \det(I_m + uJ)$$

对任意矩阵 $P_{m \times n}$ 和 $Q_{n \times m}$, 有

$$\det(I_m - PQ) = \det(I_n - QP)$$

因此,

$$\zeta_{\omega}(G, u)^{-1} = \det(I_n - u^T T(I_m + uJ)^{-1} S) \det(I_m + uJ)$$

现计算 $\det(I_m + uJ)$ 和 $(I_m + uJ)^{-1}$ 。

$$\det(I_m + uJ) = \sum_{j=m_1+1}^{m_1+t} (1 - u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2)$$

令 $x_{e_j} = x_j = 1 - u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2$, $m_1 + 1 \leq j \leq m_1 + t$, $t = \frac{m_2}{2}$, 则

$$(I_m + uJ)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_{m_1+1}} & \frac{-u\omega(t(e_{m_1+1}))^2}{x_{m_1+1}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-u\omega(o(e_{m_1+1}))^2}{x_{m_1+1}} & \frac{1}{x_{m_1+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_{m_1+t}} \end{bmatrix}$$

因此, 对任意的 $(u, v) \in D(G)$,

$$(T^T(I_m + uJ)^{-1}S)_{uv} = \begin{cases} \omega(u)\omega(v), & (u, v) \in D(G_1) \\ \frac{\omega(u)\omega(v)}{1 - u^2\omega(u)^2\omega(v)^2}, & (u, v) \in D(G_2) \end{cases}$$

对任意的 $v \in V(G)$,

$$T^T(I_{2m} + uJ)^{-1}S)_{vv} = -u \sum_{o(e)=v, e \in D(G_2)} \frac{\omega(v)^2\omega(t(e))^2}{1 - u^2\omega(v)^2\omega(t(e))^2}$$

根据 $\overline{A}$, $\overline{D}$ 的定义可得

$$\zeta_\omega(G, u)^{-1} = \prod_{j=m_1+1}^{m_1+t} (1 - u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2) \det(I_n - u\overline{A} + u^2\overline{D})$$

证毕。

由定理 3 可得推论 1-4。

推论 1^[12] 令 G 是有向图, 有 n 个顶点和 m 条有向边, 且 $G = G_2$, 即 G 是对称有向图, 此时 G 也可以看作无向图。设 ω 是顶点权重函数, 则图 G 的顶点加权 zeta 函数 $\zeta_\omega(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$\zeta_\omega(G, u)^{-1} = \prod_{j=1}^{m/2} (1 - u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2) \det(I_n - u\overline{A} + u^2\overline{D})$$

推论 2 令 G 是有向图, 有 n 个顶点和 m 条有向边, 且 $G = G_1$, 此时 G 是完全非对称有向图, 令 ω 是顶点权重函数, 则图 G 的顶点加权 zeta 函数 $\zeta_\omega(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$\zeta_\omega(G, u)^{-1} = \det(I_n - u\overline{A}(G))$$

推论 3^[15] 令 G 是有向图, 有 n 个顶点和 m 条有向边, 则有向图 G 的 Ihara zeta 函数 $Z(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$Z(G, u)^{-1} = (1 - u^2)^{t-n} \det[I_n - uA(G) + u^2(D_G + uA(G_1) - I_n)]$$

其中, $t = \frac{m_2}{2}$ 。

证明 若 $\omega = 1$, 则

$$\overline{A}(G) = A(G_1) + \frac{1}{1 - u^2}A(G_2)$$

$$\overline{D}(G) = \frac{1}{1 - u^2}D_G$$

因此,

$$\begin{aligned} Z(G, u)^{-1} &= \zeta_{\omega=1}(G, u)^{-1} = \\ &= (1 - u^2)^{t-n} \det[I_n - u(A(G_2) + (1 - u^2)A(G_1)) + u^2(D_G - I_n)] = \\ &= (1 - u^2)^{t-n} \det[I_n - uA(G) + u^2(D_G + uA(G_1) - I_n)] \end{aligned}$$

推论 4 令 G 是有向图, 有 n 个顶点和 m 条有向边, 再令 $\omega = 1$, 则有:

a.^[4] 若 $G = G_2$, 即 G 是对称有向图, 则 G 的 Ihara zeta 函数 $Z(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$Z(G, u)^{-1} = (1 - u^2)^{m/2-n} \det[I_n - uA(G) + u^2(D_G - I_n)]$$

b.^[11] 若 $G = G_1$, 此时 G 是完全非对称有向图, 则 G 的 Ihara zeta 函数 $Z(G, u)$ 有如下的行列式表达式:

$$Z(G, u)^{-1} = \det(I_n - uA(G)).$$

3 例子

考虑图 1 中的有向图 G , 令 G 的顶点是 x_1, x_2, x_3, x_4 且 ω 是 G 的顶点权重, $\omega(x_i) = \omega_i, i = 1, 2, \cdots, 4$ 。则有

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_1\omega_2}{1 - u^2\omega_1^2\omega_2^2} & 0 & \omega_1\omega_4 \\ \frac{\omega_1\omega_2}{1 - u^2\omega_1^2\omega_2^2} & 0 & \frac{\omega_2\omega_3}{1 - u^2\omega_2^2\omega_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2\omega_3}{1 - u^2\omega_2^2\omega_3^2} & 0 & \omega_3\omega_4 \\ 0 & \omega_2\omega_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{1 - u^2\omega_1^2\omega_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{1 - u^2\omega_1^2\omega_2^2} + \frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1 - u^2\omega_2^2\omega_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1 - u^2\omega_2^2\omega_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由定理 3 可得

$$\zeta_{\omega}(G,u)^{-1}=\prod_{j=4}^5(1-u^2\omega(o(e_j))^2\omega(t(e_j))^2)\det(I_n-u\overline{A}+u^2\overline{D})=(1-u^2\omega_1^2\omega_2^2)(1-u^2\omega_2^2\omega_3^2)\cdot$$
$$\det\begin{bmatrix}1+u^2\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&\frac{-u\omega_1\omega_2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&0&-u\omega_1\omega_4\\ \frac{-u\omega_1\omega_2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&1+u^2\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}+u^2\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&\frac{-u\omega_2\omega_3}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&0\\ 0&\frac{-u\omega_2\omega_3}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&1+u^2\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&-u\omega_3\omega_4\\ 0&-u\omega_2\omega_4&0&1\end{bmatrix}=$$
$$(1-u^2\omega_1^2\omega_2^2)(1-u^2\omega_2^2\omega_3^2)\cdot$$
$$\det\begin{bmatrix}\frac{1}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&\frac{-u\omega_1\omega_2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&0&-u\omega_1\omega_4\\ \frac{-u\omega_1\omega_2}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}&\frac{1}{1-u^2\omega_1^2\omega_2^2}+u^2\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&\frac{-u\omega_2\omega_3}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&0\\ 0&\frac{-u\omega_2\omega_3}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{1-u^2\omega_2^2\omega_3^2}&-u\omega_3\omega_4\\ 0&-u\omega_2\omega_4&0&1\end{bmatrix}=$$
$$1-u^3\omega_1^2\omega_2^2\omega_4^2-u^3\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2$$

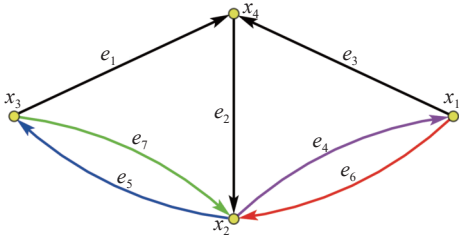


图 1 有向图G
Fig. 1 Digraph G

参考文献：

[1] IHARA Y. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1966, 18(3): 219–235.

[2] SUNADA T. L-functions in geometry and some applications[M]//Curvature and Topology of Riemannian Manifolds. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986: 266–284.

[3] SUNADA T. Fundamental groups and laplacians[M]//Geometry and Analysis on Manifolds. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1988: 248–277.

[4] BASS H. The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice[J]. International Journal of Mathematics, 1992, 3(6): 717–797.

[5] STARK H M, TERRAS A A. Zeta functions of finite graphs and coverings[J]. Advances in Mathematics, 1996, 121(1): 124–165.

[6] FOATA D, ZEILBERGER D. A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for

graphs[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1999, 351(6): 2257–2274.

[7] KOTANI M, SUNADA T. Zeta functions of finite graphs[J]. Journal of Mathematical Sciences (University of Tokyo), 2000, 7(1): 7–25.

[8] MIZUNO H, SATO I. Zeta functions of digraphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2001, 336(1/3): 181–190.

[9] MIZUNO H, SATO I. Weighted zeta functions of digraphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2002, 355(1/3): 35–48.

[10] MIZUNO H, SATO I. Weighted zeta functions of graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2004, 91(2): 169–183.

[11] HORTON M D. Ihara zeta functions of digraphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 425(1): 130–142.

[12] KONNO N, MITSUHASHI H, MORITA H, et al. A new weighted Ihara zeta function for a graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 2019, 571: 154–179.

[13] ZHU L. A vertex weighted Bartholdi zeta function for a graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 2021, 621: 254–271.

[14] AMITSUR S A. On the characteristic polynomial of a sum of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1980, 8(3): 177–182.

[15] SATO I. Bartholdi zeta functions of group coverings of digraphs[J]. Far East Journal of Mathematical Sciences, 2005, 18(3): 321–339.