

带有变号势函数和 Hardy 项的临界 p -双调和方程弱解的存在性

崔会敏, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用山路引理、集中紧性原理和 Hardy 不等式, 研究了带有变号势函数和 Hardy 项的临界 p -双调和方程弱解的存在性问题。首先验证了山路引理的几何条件, 然后证明当 $0 < \mu < \mu_0$, 山路水平 $c < \frac{2}{N}S^{N/2p} - \mu^{p^*/(p^*-q)}G$ 时满足 $(PS)_c$ 条件, 最终证明了该类临界 p -双调和方程至少存在一个非平凡弱解。

关键词: 山路引理; 集中紧性原理; 弱解; Hardy 不等式

中图分类号: O 175.4 **文献标志码:** A

The existence of weak solutions for critical p -biharmonic equations with sign-changing weight function and Hardy term

CUI Huimin, WEI Gongming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of weak solutions for critical p -biharmonic equations with sign-changing weight function and Hardy term was studied by using mountain pass lemma, concentration-compactness principle and Hardy's inequality. Firstly, the geometric conditions of mountain pass lemma are verified. Next, if $0 < \mu < \mu_0$, $(PS)_c$ condition is satisfied when mountain level $c < \frac{2}{N}S^{N/2p} - \mu^{p^*/(p^*-q)}G$. Thus, it is proved that there exists at least one nontrivial weak solution for the given critical p -biharmonic equations.

Keywords: mountain pass lemma; concentrative-compactness principle; weak solution; Hardy's inequality

1 问题的提出

例如, 它可以用来研究悬索桥的行进波问题^[1-2]和弹性板在流体中的静态扰度问题。近年来, 非线性双调和方程和 p -双调和方程解的存在性问题被四阶方程出现在数学和物理的各个分支中。

收稿日期: 2021-10-23

第一作者: 崔会敏(1994-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: m19821231995@163.com

通信作者: 魏公明(1974-), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

广泛研究^[3-4]。关于多重调和问题，Pucci等^[5]研究了多重调和算子的临界指数和临界维数。Pucci等^[6]研究了多重调和问题在 N 维空间的一个球 B_R 上的非线性特征值问题，得到了特征值的连续谱，且证明了最小特征值是孤立的。特别地，对于带有Hardy项的奇异 p -双调和椭圆型方程解的存在性问题正在被越来越多的学者关注^[7-10]。

2018年，文献[3]研究了带有临界指标和凹凸非线性项的 p -双调和方程

$$\Delta_p^2 u = \lambda f(x)|u|^{q-1}u + |u|^{p^*-1}u, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

其中， $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ ， $\Omega \in \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域， $0 < q < 1 < p = \frac{N+4}{N-4}$ ， $N > 4$ ， Δ_p^2 表示 p -双调和算子。使用山路引理、集中紧性引理和亏格的方法证明了方程(1)分别在Dirichlet边界和Navier边界下解的多重性问题。类似地，在次临界下带有凹凸非线性函数和变号势函数的 p -双调和问题在Navier边界下解的存在性也可以参考文献[11]。

2020年，文献[7]研究了带有Hardy项的 p -双调和方程

$$\Delta_p^2 u = \frac{\mu|u|^{r-2}u}{|x|^s} + f(x,u), \quad x \in \Omega \quad (2)$$

其中， $\Omega \in \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑区域， $2 < 2p < N$ ， $\mu \geq 0$ ， $0 \in \Omega$ ， $p \leq r < p^*(s) \leq p^*(0) := p^*$ 。使用山路引理等变分的方法，证明了方程(2)分别在Dirichlet边界和Navier边界下解的存在性和多重性。

受文献[3, 7, 11]的启发，本文主要研究了临界 p -双调和方程

$$\Delta_p^2 u - \lambda \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}} + \mu V(x)|u|^{q-2}u = |u|^{p^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (3)$$

其中， $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ， $\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$ 表示 p -双调和算子， $2 \leq p < q < p^*$ ， $p^* = \frac{Np}{N-2p}$ ， $N > 2p$ ， $V(x) \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ， $V(x)$ 是变号函数。

本文所研究的问题比文献[7]的问题更一般，因为，在 $\mathbb{R}^N$ 上， $W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 的嵌入不是紧的，恢复紧性是本文的重点也是难点。

2 预备知识

定义 W 空间是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在范数 $\|u\|_W = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。定义 $L^t(\mathbb{R}^N)$ 上的范数： $\|u\|_t = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$ ，

$1 \leq t < \infty$ 。
根据 p -双调和Hardy's不等式^[12]：
$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx \leq \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^p dx, \quad \bar{\lambda} = \left(\frac{(n-2p)(p-1)n}{p^2}\right)^p$$

可以推出，对任意的 $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ ， W 中的内积和范数等价于

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{p-2} \Delta u \Delta v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2} uv}{|x|^{2p}} dx$$

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^p - \lambda \frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

用 S 表示 W 连续嵌入到 $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 的最佳常数，即
$$S := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^p - \lambda \frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right) dx : u \in W, \|u\|_{p^*} = 1 \right\}$$

根据文献[13]可知 S 是可以取到的，假设存在正函数 $U \in W$ 可以取到 S 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta U|^p - \lambda \frac{|U|^p}{|x|^{2p}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |U|^{p^*} dx = S^{\frac{N}{2p}}$$

定义函数 $V(x)$ 进一步满足 $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|U|^q dx > 0$ ，不失一般性，令 $\Omega = \{x : V(x) \neq 0\}$ 。

为了方便，当积分区域为 $\mathbb{R}^N$ 时，省略不写。令

$$M_1 = \frac{2}{N} > 0, \quad M_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) C \left(\max_{x \in \Omega} V(x)\right) > 0$$

$$G = M_2 \left(\frac{qM_2}{p^*M_1}\right)^{\frac{q}{p^*-q}} > 0$$

$$\mu_1 = \left(\frac{2S^{\frac{N}{2p}}}{NG}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}} > 0$$

$$\mu_2 = \left(\frac{t_1^q \int_{\Omega} V(x)|U|^q dx}{qG}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}} > 0$$

$\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\} > 0$ ， $C > 0, t_1 > 0$ ， t_1 仅依赖于 μ_1 。
本文研究问题(3)的弱解的存在性。对 $u \in W$ ，定义问题(3)的泛函：

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^p - \lambda \frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right) dx + \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^q dx - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx$$

很容易得到 $I(u) \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ，并且具有Fréchet导数为

$$\begin{aligned} \langle I'(u), v \rangle = & \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^{p-2} \Delta u \Delta v - \lambda \frac{|u|^{p-2} uv}{|x|^{2p}}\right) dx + \\ & \mu \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{q-2} uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} uv dx \end{aligned}$$

因为，问题(3)的所有解都是泛函 $I(u)$ 的临界点，也就是对任意的 $v \in W$ ，使得 $\langle I'(u), v \rangle = 0$ 成立的点，因此，可以通过求满足 $\langle I'(u), v \rangle = 0$ 的函数 u ，

就得到了问题 (3) 的弱解 u 。

本文主要结果为定理 1。

定理 1 如果 $0 < \mu < \mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$,

问题 (3) 至少存在一个非平凡弱解。

3 定理 1 的证明

首先验证山路引理的几何条件, 得到引理 1。

引理 1 对 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, 有以下 2 个结论成立:

a. 存在常数 $\rho, \beta > 0$, 使得 $I(u) \geq \beta, \|u\| = \rho$;

b. 存在 $e \in W$ 且 $\|e\| > \rho$, 使得 $I(e) \leq 0$ 。

证明 a. 因为, $V(x) \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p} \int \left(|\Delta u|^p - \lambda \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} \right) dx + \frac{\mu}{q} \int V(x) |u|^q dx - \frac{1}{p^*} \int |u|^{p^*} dx \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{\mu}{q} \left(\min_{x \in \Omega} V(x) \right) \int |u|^q dx - \frac{1}{p^*} S^{-\frac{p^*}{2}} \|u\|^{p^*} \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{\mu}{q} \left(\min_{x \in \Omega} V(x) \right) C^{-\frac{q}{2}} \|u\|^q - \frac{1}{p^*} S^{-\frac{p^*}{2}} \|u\|^{p^*} \end{aligned}$$

因为, $p < q < p^*$, 如果取 $\|u\| = \rho > 0$ 足够小, 则一定存在 $\beta > 0$, 使得 $I(u) \geq \beta > 0$ 。

b. 取 $u \in W \setminus \{0\}$, 则

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^p}{p} \int \left(|\Delta u|^p - \lambda \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} \right) dx + \frac{\mu t^q}{q} \int V(x) |u|^q dx - \\ &\quad \frac{t^{p^*}}{p^*} \int |u|^{p^*} dx \end{aligned}$$

因为, 当 $t \rightarrow +\infty$, $I(tu) \rightarrow -\infty$, 即一定可以取到 $\|e\| > \rho$, 使得 $I(e) \leq 0$ 。证毕。

通过引理 1, 结合山路引理^[14], 存在 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\} \in W$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0, \quad c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(h(t))$$

$$\Gamma = \{h \in C([0,1], W) : h(0) = 0, h(1) = e\}$$

定理 1 当 $\mu \in (0, \mu_1)$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, $c < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - G \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}}$

时, $I(u)$ 的任意 $(PS)_c$ 序列具有强收敛的子序列。

证明 假设 $\{u_n\} \subset W$ 是泛函 $I(u)$ 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $I(u_n) \rightarrow c$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 成立, 并且一定存在 $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$, 使得

$$|I(u_n)| \leq M, \quad |I'(u_n)u_n| \leq M \|u_n\|$$

则

$$\begin{aligned} M(1 + \|u_n\|) &\geq I(u_n) - \frac{1}{q} I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p + \\ &\quad \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int |u_n|^{p^*} dx \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p \end{aligned}$$

即 $\{u_n\} \subset W$ 是一个有界列, 此时可以假设存在一个 $u \in W$, 使得在 W 中 $u_n \rightharpoonup u$, 在 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ($1 < q < 2^*$) 中有 $u_n \rightarrow u$, 利用集中紧性原理^[14], 有

$$\begin{aligned} |\Delta u_n|^p dx &\rightharpoonup d\gamma \geq |\Delta u|^p dx + \sum_{k \in J} \gamma_k \delta_{x_k} + \gamma_0 \delta_0 \\ |u_n|^{p^*} dx &\rightharpoonup d\nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{k \in J} \nu_k \delta_{x_k} + \nu_0 \delta_0 \\ \frac{|u_n|^p}{|x|^{2p}} dx &\rightharpoonup d\sigma = \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx + \sigma_0 \delta_0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $J \subset \mathbb{N}$ 是有限集, δ_x 是 $x \in \mathbb{R}^N$ 时的 Dirac 测度, γ, σ, ν 是非负的有界测度。不失一般性, 只考虑在奇点 $0 \in \mathbb{R}^N$ 处集中的可能性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取截断函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得在 $B_\varepsilon(0)$ 内有 $\phi = 1$, 在 $B_{2\varepsilon}(0)$ 外有 $\phi = 0$, 并且有 $|\nabla \phi| \leq \frac{2}{\varepsilon}$, $|\Delta \phi| \leq \frac{2}{\varepsilon^2}$ 。因为, 对 W 中有界序列 $\{\phi u_n\}$, 必成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'(u_n), \phi u_n \rangle = 0$, 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n \Delta(\phi u_n) dx &- \lambda \int \phi d\sigma = \\ &- \mu \int V(x) |u|^q \phi dx + \int \phi d\nu \end{aligned} \quad (5)$$

因为,

$$\begin{aligned} \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n \Delta(\phi u_n) dx &= \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n ((\Delta \phi) u_n + \\ &\quad 2 \langle \nabla \phi, \nabla u_n \rangle + \phi \Delta u_n) dx = \int \phi |\Delta u_n|^p dx + \\ &\quad \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n (2 \langle \nabla \phi, \nabla u_n \rangle + u_n \Delta \phi) dx \end{aligned} \quad (6)$$

对式 (6) 在 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n \Delta(\phi u_n) dx &= \int \phi d\gamma + \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n (2 \langle \nabla \phi, \nabla u_n \rangle + u_n \Delta \phi) dx & \quad (7) \end{aligned}$$

现证 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n (2 \langle \nabla \phi, \nabla u_n \rangle + u_n \Delta \phi) dx = 0$ 。

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n \langle \nabla \phi, \nabla u_n \rangle dx \right| \leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |\Delta u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |\nabla \phi|^p |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ C \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |\nabla \phi|^p |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \cap B(0, 2\varepsilon) |\nabla \phi|^p |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \cap B(0, 2\varepsilon) |\nabla \phi|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \cap B(0, 2\varepsilon) |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx &\leq \\ C \int_{B(0, 2\varepsilon)} |\nabla u|^{\frac{Np}{N-p}} dx &\xrightarrow{N-p} 0 \end{aligned} \quad (8)$$

和

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\Delta u_n|^{p-2} \Delta u_n (u_n \Delta \phi) dx \right| \leq$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Delta u_n|^{p-1} |u_n| |\Delta \phi| dx \leq$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |\Delta u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |u_n|^p |\Delta \phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$C \left(\int_{\mathbb{R}^N \cap B(0, 2\varepsilon)} |\Delta \phi|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2p}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \cap B(0, 2\varepsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq$$
$$C \left(\int_{B(0, 2\varepsilon)} |\Delta u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \rightarrow 0 \tag{9}$$

结合式(5)~(9), 有

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int \lambda \phi d\sigma + \int \phi d\gamma + \mu \int V(x) |u|^q dx - \int \phi d\nu \right\} \geq -\lambda \sigma_0 + \gamma_0 - \nu_0$$

应用集中紧性原理^[14], 有 $S(\nu_0)^{\frac{p}{p^*}} \leq \gamma_0 - \lambda \sigma_0$, 结合上式可以得到 $\nu_0 \geq S^{\frac{N}{2p}}$.

由 $V(x) \in C_c(\mathbb{R}^N)$ 可得, $\int V(x) |u_n|^q dx \rightarrow \int V(x) |u|^q dx$. 故有

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I(u_n) - \frac{1}{p} \langle I'(u_n), u_n \rangle \right) =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \mu \int V(x) |u_n|^q dx + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \int |u_n|^{p^*} dx \right) =$$
$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \mu \int V(x) |u|^q dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \int |u_n|^{p^*} dx \geq$$
$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \mu \int V(x) |u|^q dx + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\int |u|^{p^*} dx + \nu_0 \right) \geq$$
$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \mu C \left(\max_{x \in \Omega} V(x) \right) \left(\int |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{q}{p^*}} +$$
$$\frac{2}{N} \int |u|^{p^*} dx + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}}$$

其中, C 为正常数. 令 $g(x) =: M_1 x^{p^*} - M_2 \mu x^q$,

$$M_1 = \frac{2}{N}, \quad M_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) C \left(\max_{x \in \Omega} V(x) \right)$$

由 $g'(x) = 0$ 很容易求得 $g(x)$ 的临界点为 $x_0 = \left(\frac{q M_2 \mu}{p^* M_1} \right)^{\frac{1}{p^*-q}}$. 通过计算可知 $g(x)$ 在 $x_0 = \left(\frac{q M_2 \mu}{p^* M_1} \right)^{\frac{1}{p^*-q}}$ 上取得极小值 $g(x_0) = M_3 - \mu M_4$, 其中,

$$M_3 = M_1 \left(\frac{q M_2 \mu}{p^* M_1} \right)^{\frac{p^*}{p^*-q}}, \quad M_4 = M_2 \left(\frac{q M_2 \mu}{p^* M_1} \right)^{\frac{q}{p^*-q}}$$

因此, 可得

$$c \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} + M_3 - \mu M_4 = \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$$
$$G = M_2 \left(\frac{q M_2}{p^* M_1} \right)^{\frac{q}{p^*-q}}$$

与条件矛盾. 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\int |u_n|^{p^*} dx \rightarrow \int |u|^{p^*} dx$. 根据文献^[15]的引理 3.4, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$o(1) = \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle =$$
$$\int (|\Delta u_n|^{p-2} u_n - |\Delta u|^{p-2} u) (u_n - u) dx +$$
$$\mu \int V(x) (|u_n|^{q-2} u_n - |u|^{q-2} u) (u_n - u) dx -$$
$$\int (|u_n|^{p^*-2} u_n - |u|^{p^*-2} u) (u_n - u) dx \geq$$
$$C \|u_n - u\|^p + o(1)$$

故在 W 中有 $u_n \rightarrow u$. 证毕.

定理 2 当 $\mu \in (0, \mu_0)$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, 山路水平 c 满足 $0 < \beta \leq c < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$.

证明 对任意的 $\mu \in (0, \mu_1)$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, $\frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G > 0$.

定义函数

$$h(t) = \frac{1}{p} t^p \|U\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int |U|^{p^*} dx =: C_1 t^p - C_2 t^{p^*}, \quad t \geq 0$$

其中, $C_1 = \frac{1}{p} S^{\frac{N}{2p}}$, $C_2 = \frac{1}{p^*} S^{\frac{N}{2p}}$, 通过计算很容易得到 $h(t)$ 存在唯一的零点 $t_0 = \left(\frac{p C_1}{p^* C_2} \right)^{\frac{1}{p^*-p}} = 1$, 并且 $h(t)$ 在 t_0 处取得极大值 $h(t) = \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}}$, 即对任意的 $t > 0$, 都有

$$I(tu) = h(t) - \frac{\mu t^q}{q} \int V(x) |U|^q dx \leq$$
$$\frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \frac{\mu t^q}{q} \int V(x) |U|^q dx \tag{10}$$

因为, $I(0) = 0$, 则存在仅依赖于 μ_1 的 $t_1 > 0$, 使得对任意的 $\mu \in (0, \mu_1)$, 都有

$$\max_{0 \leq t \leq t_1} I(tu) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$$

另一方面, 由式(10)可知,

$$\max_{t > t_1} I(tu) \leq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \frac{\mu t_1^q}{q} \int V(x) |U|^q dx$$

即对任意的 $\mu \in (0, \mu_2)$, 都有 $\max_{t \geq t_1} I(tu) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$.

综上, 取 $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, 对任意的 $\mu \in (0, \mu_0)$, 都有 $\max_{t > 0} I(tu) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$.

根据山路水平 c 的定义可知, $c \leq \max_{t > 0} I(tu) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$. 证毕.

通过以上定理和引理, 可知当 $\mu \in (0, \mu_0)$, $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, 山路水平 $c < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - \mu^{\frac{p^*}{p^*-q}} G$, 泛函 $I(u)$ 的任意一个 $(PS)_c$ 序列都有一个强收敛的子序列, 即方程(3)在 W 中的弱解是存在的, 并且弱

解最少有一个。

参考文献:

- [1] CHEN Y, MCKENNA P J. Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations[J]. [Journal of Differential Equations](#), 1997, 136(2): 325–355.
- [2] LAZER A C, MCKENNA P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis[J]. [SIAM Review](#), 1990, 32(4): 537–578.
- [3] BUENO H, PAES-LEME L, RODRIGUES H. Multiplicity of solutions for p -biharmonic problems with critical growth[J]. [Rocky Mountain Journal of Mathematics](#), 2018, 48(2): 425–442.
- [4] BENEDIKT J, DRÁBEK P. Estimates of the principal eigenvalue of the p -biharmonic operator[J]. [Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications](#), 2012, 75(13): 5374–5379.
- [5] PUCCI P, SERRI J. Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators[J]. [Journal de Mathématiques Pures et Appliquées](#), 1990, 69(1): 55–83.
- [6] PUCCI P, RĂDULESCU V. Remarks on a polyharmonic eigenvalue problem[J]. [Comptes Rendus Mathématique](#), 2010, 348(3/4): 161–164.
- [7] WANG W H. p -biharmonic equation with Hardy-Sobolev exponent and without the Ambrosetti-Rabinowitz condition[J]. [Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations](#), 2020(42): 1–16.
- [8] 任艳. 具有临界指数的两类调和方程解的存在性 [D]. 太原: 中北大学, 2019.
- [9] YANG R R, ZHANG W, LIU X Q. Sign-changing solutions for p -biharmonic equations with Hardy potential in $\mathbb{R}^N$ [J]. [Acta Mathematica Scientia](#), 2017, 37(3): 593–606.
- [10] HUANG Y S, LIU X Q. Sign-changing solutions for p -biharmonic equations with Hardy potential[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2014, 412(1): 142–154.
- [11] JI C, WANG W H. On the p -biharmonic equation involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function[J]. [Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations](#), 2012(2): 1–17.
- [12] DAVIES E B, HINZ A M. Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$ [J]. [Mathematische Zeitschrift](#), 1998, 227(3): 511–523.
- [13] BHAKTA M, MUSINA R. Entire solutions for a class of variational problems involving the biharmonic operator and Rellich potentials[J]. [Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications](#), 2012, 75(9): 3836–3848.
- [14] STRUWE M. Variational methods: Applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems[M]. 4th ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [15] HAN Q. Compact Sobolev embeddings and positive solutions to a quasilinear equation with mixed nonlinearities[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2020, 481(2): 123150.

(编辑: 石 瑛)