

动力系统中 $\mathcal{F}$ -传递性与 $\mathcal{F}$ -混合性的一个注记

姜文雅¹, 张思汇¹, 刘杰²

(1. 上海理工大学理学院, 上海 200093; 2. 南京理工大学数学与统计学院, 南京 210094)

摘要: 对一维动力系统的混合性及传递性进行了一般性讨论。设 (I, f) 是一个拓扑动力系统(简称动力系统或系统), 其中 I 为紧致度量空间(度量为 d), $f: X \rightarrow X$ 是连续映射。基于Furstenberg族, 研究了一维动力系统 (I, f) 和它的泛函包络系统 $(L^1(I, I), H_f)$ 的一些性质, 在前人研究的混合性和传递性的基础上, 引进了 $\mathcal{F}$ -混合与 $\mathcal{F}$ -传递的概念, 并证明了如果 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的, 则 $(L^1(I, I), H_f)$ 是 $\mathcal{F}$ -传递的。

关键词: $\mathcal{F}$ -传递; $\mathcal{F}$ -混合; 泛函包络

中图分类号: O 19 **文献标志码:** A

A remark of $\mathcal{F}$ -transitive and $\mathcal{F}$ -mixed properties in dynamical systems

JIANG Wenya¹, ZHANG Sihui¹, LIU Jie²

(1. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The mixed and transitive properties of one-dimensional dynamic systems were generally discussed. Here, the (I, f) was defined as a topological dynamical system (referred to as a dynamical system or system), where I was a compact metric space (metric was d) and $f: X \rightarrow X$ was a continuous map. Based on the Furstenberg family, several properties of the one-dimensional dynamical system (I, f) and its functional envelope system $(L^1(I, I), H_f)$ were studied. Based on the mixed and transitive properties studied by previous people, the concept of $\mathcal{F}$ -mixed and $\mathcal{F}$ -transitive were introduced. The results can help prove that if (I, f) is $\mathcal{F}$ -mixed, and then $(L^1(I, I), H_f)$ is $\mathcal{F}$ -transitive.

收稿日期: 2023-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11971233)

第一作者: 姜文雅(1997-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: 2521150292@qq.com

通信作者: 张思汇(1985-), 男, 讲师. 研究方向: 复分析、离散动力系统. E-mail: 071018005@fudan.edu.cn

引文格式: 姜文雅, 张思汇, 刘杰. 动力系统中 $\mathcal{F}$ -传递性与 $\mathcal{F}$ -混合性的一个注记[J]. 上海理工大学学报, 2024, 46(4): 427-430. DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.20230301004

Citation: JIANG Wenya, ZHANG Sihui, LIU Jie. A remark of $\mathcal{F}$ -transitive and $\mathcal{F}$ -mixed properties in dynamical systems[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2024, 46(4): 427-430.

Keywords: $\mathcal{F}$ -transitive; $\mathcal{F}$ -mixed; functional envelope

在数学研究领域, 拓扑动力系统理论是一个古老而又崭新的分支。它的雏形源于牛顿时代的 n 体问题, 理论框架则成型于 1955 年 Gottschalk 等^[1]的工作, 而在 1981 年 Furstenberg^[2]之后该理论获得了极大的发展。近年来, 随着其在交叉学科中的广泛应用, 很多优秀的数学家投身到这个领域的研究中。这个理论与很多热门的前沿数学分支(如传递系统的分类、遍历理论及某些偏微分方程系统的混沌性态等)有着密切的关联, 其理论本身也包含了众多的奇思妙想。

1 问题的提出

本文中, 基于 Furstenberg 族, 研究了一维动力系统 (I, f) 和它的泛函包络系统 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 的一些性质。

设 (X, f) 是一个拓扑动力系统(简称动力系统或系统), 其中, X 是紧致度量空间(度量为 d), $f: X \rightarrow X$ 是连续映射, 对 $n \in \mathbb{Z}^+$, 称 $f^n = f \circ \dots \circ f$ 为 f 的 n 次迭代。对 $n = 0$, 约定 $f = id$, 其中, id 为恒等映射^[3]。

对于动力系统 (X, f) , 如果 $U, V \subset X$, 定义回复时间集为

$$N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\} \quad (1)$$

如果对 X 的任意两个非空开子集 U, V , 回复时间集 $N_f(U, V)$ 非空, 称系统 (X, f) 或 f 是传递的。如果乘积系统 $(X \times X, f \times f)$ 是传递的, 称系统 (X, f) 是弱混合的。如果对 X 的任意两个非空开集 U, V , 存在 $N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\{N, N+1, \dots\} \subset N_f(U, V) \quad (2)$$

则称系统 (X, f) 是强混合的。

Furstenberg^[4]证明了对每个正整数 n , 系统 (X, f) 是弱混合的, 意味着 n 次乘积系统 $(X^n, f^{(n)})$ 是传递的。即设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 若 $(X \times X, f \times f)$ 是传递的, 当且仅当对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$, 乘积系统 $(X^n, f^{(n)})$ (n 次)也是传递的, 其中, $X^n = X \times \dots \times X$ (n 次), $f^{(n)} = f \circ \dots \circ f$ (n 次)。

设动力系统 (I, f) , 其中, $I = [0, 1]$ 。由 $H_f: \mathcal{L}^1(I, I) \rightarrow \mathcal{L}^1(I, I)$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ 定义它的泛函包络 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 。不难验证, 若 H_f 是一致连续的, 则

$(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 也是一个动力系统。

Auslander 等^[5]证明了系统的泛函包络也具有系统的一些性质。Chen 等^[6-8]证明了在拓扑动力学意义上, 动力系统 (I, f) 总是比它的泛函包络更简单。对类似问题的研究可以参考文献 [9-12]。

Chen 等^[8]证明了如下命题:

命题 1^[8] 若动力系统 (I, f) 是一个传递系统, 则 f 是混合的, 当且仅当存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f([0, c]) = [c, 1]$ 且 $f([c, 1]) = [0, c]$, 且 c 是唯一不动点。

命题 2^[8] 设动力系统 (I, f) 是一个传递系统, 那么它的泛函包络 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 是渐近敏感的。

定理 1^[8] 若动力系统 (I, f) 是弱混合的, 则 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 是强混合的并且是传递的。

2 定义与符号

设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ 为正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的所有子集构成的集合, $\mathcal{P}$ 的一个子集 $\mathcal{F}$ 称为 Furstenberg 族, 如果它满足遗传向上性, 即若 $F_1 \subset F_2$ 且 $F_1 \in \mathcal{F}$, 那么有 $F_2 \in \mathcal{F}$ 。如果族 $\mathcal{F}$ 不是空集也不是 $\mathcal{P}$, 那么这称为真族。对于一个族 $\mathcal{F}$, 它的对偶族定义如下: $k\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{P} : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ 对所有的 } F' \in \mathcal{F} \text{ 成立}\}$ 。设 $\mathcal{F}_{\inf}$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 的所有无限子集构成的族, 则它的对偶族为 $k\mathcal{F}_{\inf} = \mathcal{F}_{\text{cf}}$, $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 是所有有限余集构成的族, $\mathbb{Z}_+$ 的任意子集的非空集合 A 自然生成的族为

$$[\mathcal{A}] := \{F \subset \mathcal{P} : \text{存在 } A \in \mathcal{A}, \text{ 使得 } A \subset F\} \quad (3)$$

对于 $\mathbb{Z}_+$ 的可数子集构成集合 A , 如果 $\mathcal{F} \equiv [A]$, 则 $\mathcal{F}$ 是可数生成的。

用族来描述动力学性质的研究至少可以追溯到 Gottschalk^[1]等的研究, 并且由 Furstenberg^[2, 10]作进一步推广。

设族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\inf}$, 动力系统 (I, f) 称为 $\mathcal{F}$ -传递的是指对 I 的任意非空开集 U 和 V , $N(U, V) \in \mathcal{F}$ 成立。动力系统 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的是指 $(I \times I, f \times f)$ 为 $\mathcal{F}$ -传递的^[9]。

一般地, 当 $\mathcal{F}$ 取 $\mathcal{F}_{\inf}$ 时, $\mathcal{F}$ -传递即为传递性, 而 $\mathcal{F}$ -混合即为弱混合。当 $\mathcal{F}$ 取 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 时, $\mathcal{F}$ -传递与 $\mathcal{F}$ -混合是同一概念, 即强混合。

3 主要证明与结论

定理 2^[8] 若 (I, f) 是一个动力系统, 其中

$I = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ 是一个 Furstenberg 族, (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的, 当且仅当 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 是 $\mathcal{F}$ -传递的。

证明 [8] 假设 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的, $\mathcal{F}$ 是一个 Furstenberg 族, 取 $g, h \in \mathcal{L}^1(I, I)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 要证明 $N_{H_f}(B_\varepsilon(g), B_\varepsilon(h)) \in \mathcal{F}$ 。

注意到对所有的 $f, g \in \mathcal{L}^1(I, I)$, 在 $\mathcal{L}^1(I, I)$ 上的度量 ρ 定义为 $\rho(f, g) = \int_I |f(x) - g(x)| d\mu(x)$ 。

令

$$\begin{cases} L_i = \left\{ x \in I : \frac{i-1}{n} \leq g(x) < \frac{i}{n} \right\} \\ L_n = \left\{ x \in I : \frac{n-1}{n} \leq g(x) < 1 \right\} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} J_i = \left\{ x \in I : \frac{i-1}{n} \leq h(x) < \frac{i}{n} \right\} \\ J_n = \left\{ x \in I : \frac{n-1}{n} \leq h(x) < 1 \right\} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

令

$$W_{(r-1)n+s} = L_r \cap J_s, r, s = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

设

$$A = \prod_{i=1}^n \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \times \dots \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{n-1}{n}, 1\right) \quad (7)$$

且

$$B = \prod_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \times \dots \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \quad (8)$$

即 A 可看作是 n^2 个分量的向量, 其中第 1 至 n 的分量均属于 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 第 $n+1$ 至 $2n$ 的分量均属于 $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\dots$, 等等。 B 也可看作是一个 n^2 个分量的向量。

由于 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的, 这蕴含着存在 $S \in k\mathcal{F}$, 使得 $\{q_k\} \subset S$, 可以选择

$$\begin{cases} \vec{x}(q_k) = (x_1, x_2, \dots, x_n^2) \in A \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f^{(n^2)}\right)^{q_k}(\vec{x}(q_k)) \in B \end{cases} \quad (9)$$

令 $\varphi = \sum_{i=1}^{n^2} x_i \chi_{w_i}$, 其中 χ_w 为 w 的特征函数, 即为

$$\chi^w(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in W \\ 0, & \text{若 } x \notin W \end{cases}$$

通过 L_i, J_i, W_i 的构造, 可以得出, 对于每个 i , 有

$$L_i = \cup_{j=1}^n (L_i \cap J_j) = \cup_{j=1}^n W_{(i-1)n+j} \quad (10)$$

且

$$J_i = \cup_{j=1}^n (L_j \cap J_i) = \cup_{j=1}^n W_{(j-1)n+i} \quad (11)$$

则由 ρ 的定义可知

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, g) &= \int_I |\varphi(x) - g(x)| d\mu(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{J_j} |\varphi(x) - g(x)| d\mu(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{L_i \cap J_j} |\varphi(x) - g(x)| d\mu(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{W_{(i-1)n+j}} |x_{(i-1)n+j} - g(x)| d\mu(x) \leq \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \int_{J_j} d\mu(x) = \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

且

$$\begin{aligned} \rho(H_f^{q_k}(\varphi), h) &= \rho(f^{q_k} \circ \varphi, h) = \int_I |(f^{q_k} \circ \varphi)(x) - h(x)| d\mu(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{L_i \cap J_j} |(f^{q_k} \circ \varphi)(x) - h(x)| d\mu(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{W_{(i-1)n+j}} |f^{q_k}(\varphi(x)) - h(x)| d\mu(x) \leq \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \int_{L_i} d\mu(x) = \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 式 (13) 中的第一个不等号在 $W_{(j-1)n+i}$ 中, $h(x)$ 与 $f^{q_k}(\varphi(x)) = f^{q_k}(x_{(i-1)n+j})$ 均落在区间 $\left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ 中。

因此, $q_k \in N_{H_f}(B_\varepsilon(g), B_\varepsilon(h)) \cap S$, 这蕴含着 $N_{H_f}(B_\varepsilon(g), B_\varepsilon(h)) \in k\mathcal{F}$, 因此, $N_{H_f}(B_\varepsilon(g), B_\varepsilon(h)) \in \mathcal{F}$ 。

若 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 是 $\mathcal{F}$ -传递, 对任意的 $S \in k\mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ 和 $x_0, y_1, y_2 \in I$, 为了证明 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的, 由定义可得, 只需证: $N_f(B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(x_0), B_\varepsilon(y_1) \times B_\varepsilon(y_2)) \in \mathcal{F}$ 即可。

方便起见, 令 $g = \text{const}_{x_0}$, $h = y_1 \chi_{[0, \frac{1}{2}]} + y_2 \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}$, 由于 $(\mathcal{L}^1(I, I), H_f)$ 是 $\mathcal{F}$ -传递的, 对任意的 $n \in S$, 存在 $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, I)$, 有 $\rho(\varphi, g) < \frac{\varepsilon}{6}$, $\rho(f^n \circ \varphi, h) < \frac{\varepsilon}{6}$ 。

若 $\mu(\{x \in I : |\varphi(x) - g(x)| < \varepsilon\}) \leq \frac{5}{6}$, 则 $\mu(\{x \in I : |\varphi(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) > \frac{1}{6}$, 因此, $\rho(\varphi, g) \geq \frac{\varepsilon}{6}$, 矛盾。

因此

$$\mu(\{x \in I : |\varphi(x) - g(x)| < \varepsilon\}) > \frac{5}{6}$$

同理,

$$\mu\left(\left\{x \in I: \left|f^n(\varphi(x))-h(x)\right|<\varepsilon\right\}\right)>\frac{5}{6} \quad (14)$$

所以

$$\mu\left(\left\{x \in I: \left|\varphi(x)-g(x)\right|<\varepsilon\right\} \cap \left\{x \in I: \left|f^n(\varphi(x))-h(x)\right|<\varepsilon\right\}\right)>\frac{5}{6}+\frac{5}{6}-1=\frac{2}{3} \quad (15)$$

因此，存在 $z_1, z_2, 0 \leq z_1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq z_2 \leq 1$ ，使得 $|\varphi(z_i)-x_0|<\varepsilon$ 且

$$\left|f^n(\varphi(z_i))-h(z_i)\right|=\left|f^n(\varphi(z_i))-y_i\right|<\varepsilon, i=1,2 \quad (16)$$

由此可得： $n \in N_f(B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(x_0), B_\varepsilon(y_1) \times B_\varepsilon(y_2)) \cap S$ 。这蕴含着：

$$N_f(B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(x_0), B_\varepsilon(y_1) \times B_\varepsilon(y_2)) \in \mathcal{F} \quad (17)$$

因此 $(I \times I, f \times f)$ 是 $\mathcal{F}$ -传递的，因此 (I, f) 是 $\mathcal{F}$ -混合的。

综上所述，定理得证。

参考文献：

[1] GOTTSCHALK W H, HEDLUND G A. Topological dynamics[M]. Washington, DC: American Mathematical Society, 1955.

[2] FURSTENBERG H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1981.

[3] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] FURSTENBERG H. Disjointness in ergodic theory,

minimal sets, and a problem in diophantine approximation[J]. *Mathematical Systems Theory*, 1967, 1(1): 1–49.

[5] AUSLANDER J, KOLYADA S, SNOHA L. Functional envelope of a dynamical system[J]. *Nonlinearity*, 2007, 20(9): 2245–2269.

[6] CHEN Z J, HUANG Y. Functional envelopes relative to the point-open topology on a subset[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2017, 37(3): 1227–1246.

[7] CHEN Z J, HUANG Y, SUN H W, et al. Chaotic Behaviors of one-dimensional wave equations with van der pol boundary conditions containing a source term[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, 30(15): 2050227.

[8] CHEN Z J, HUANG T W, HUANG Y, et al. Chaotic behaviors of one dimensional wave equations with van der pol nonlinear boundary conditions[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2018, 59(2): 022704.

[9] LI J. Localization of mixing property via Furstenberg families[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, 35(2): 725–740.

[10] SHAO S, YE X D. F-mixing and weak disjointness[J]. *Topology and its Applications*, 2004, 135(1/3): 231–247.

[11] HUANG W, YE X D. Dynamical systems disjoint from any minimal system[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2005, 357(2): 669–694.

[12] 周小凯, 张思汇. Furstenberg 族的一些性质研究 [J]. 复旦学报(自然科学版), 2022, 61(3): 313–316.

(编辑：丁红艺)