

$\mathbb{R}^N$ 中一类非局部问题基态解的存在性

董安祺, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用变分方法研究了一类 $\mathbb{R}^N$ 上带有非局部项的分数阶椭圆型偏微分方程基态解的存在性。首先证明了对应泛函在 Nehari 流形上强制且下有界, 因而得到有界极小化序列的存在性, 其次应用 Ekeland 变分原理证明该序列是 $(PS)_c$ 序列, 并且结合假设条件证明泛函满足 $(PS)_c$ 条件, 最终得到该类方程基态解的存在性。

关键词: Kirchhoff 方程; 分数阶算子; 基态解

中图分类号: O 175.29 **文献标志码:** A

Existence of ground state solutions for a class of nonlocal problem in $\mathbb{R}^N$

DONG Anqi, WEI Gongming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of ground state solutions for a class of fractional elliptic partial differential equations with nonlocal terms by variational methods was investigated. Firstly, it was shown that the functional was coercive and bounded from below Nehari manifold, and thus there existed a sequence of bounded miniaturization. Secondly, it was proved that the sequence was a $(PS)_c$ sequence by Ekeland's principle. In addition, the functional was proved to satisfy the $(PS)_c$ condition in combination with the assumptions. Finally, the existence of the base state solution of this class of problems was obtained.

Keywords: Kirchhoff equation; fractional operator; ground state solution

1 问题的提出

考虑如下非局部问题基态解的存在性:

$$\begin{cases} \left(a - \varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u + \\ V(x)u = K(x)|u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $a > 0$, $0 < s < 1$, $2s < N$, $V(x) = 1 + f(x)$, $2 < p < 2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$, $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$, 且 ε 充分小。

$$(-\Delta)^s u = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

式中, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < r\}$ 。

更多分数阶算子的基础知识和应用见文献 [1-3]。

方程 (1) 与如下研究弦或膜振动的方程相关, 即

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

式中： L 表示弦的长度； h 表示截面面积； E 为材料的杨氏模量； ρ 为密度； P_0 为初始张力； $u=u(x,t)$ ，表示在空间坐标 x 和时间坐标 t 上的横向位移。

方程(2)由 Kirchhoff^[4]首次提出，作为经典的 D'Alembert 波动方程的一个推广，主要研究弹性弦的自由振动。Kirchhoff 模型考虑了由振动引起的弦长变化。自 Lions 在文献 [5] 中对方程(2)的研究引入变分法之后，变分法逐渐被人们广泛应用于方程(1)的研究中。

Kirchhoff 类型方程

$$\begin{cases} -(a+b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3)$$

在过去几十年被广泛研究，这里 a, b 都是正常数。由于项 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ 的出现使得方程(3)变成了非局部方程，这也表明了方程(3)不再是在逐点意义下成立。

早期 Tolksdorf^[6]和 Pohožaev^[7]对 Kirchhoff 方程进行了初步的研究。Lions 在文献 [5] 中开始引入变分法研究解的存在性后，方程(2)引起了许多学者的关注。他们的主要目的是通过变分法证明基态解的存在性，见文献 [8-13]。

文献 [14] 考虑了非局部方程

$$\begin{cases} -(a-\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + (1+\lambda f(x))u = |u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

基态解的存在性和集中性，其中， $a>0, 2<p<2^*, N \geq 3, \lambda>0, \varepsilon>0$ 且充分小。

近几年，分数阶 Kirchhoff 类型方程

$$M \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right) (-\Delta)^s u + V(x)u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

也被广泛研究，如文献 [15-16]。其中， M, V, f 满足一些合适的假设。

例如，文献 [17] 讨论了非线性分数阶 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} \left(a+b \int_{\mathbb{R}^3} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right|^2 dx \right) (-\Delta)^s u + \lambda V(x)u = |u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

式中： $s \in \left(\frac{3}{4}, 1 \right)$ ； a, b, λ 为正常数； $V(x)$ 为非负连续函数，证明了正解的存在性和渐近性。

文献 [18] 考虑了如下非线性分数阶 Kirchhoff 方程：

$$\left(\varepsilon^{2s} a + \varepsilon^{4s-3} b \int_{\mathbb{R}^3} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right|^2 dx \right) (-\Delta)^s u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

式中， $\varepsilon>0, s \in \left(\frac{1}{4}, 1 \right)$ ， a, b 为正常数，并且 $V(x)>0, f(u)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为 0， $\frac{f(t)}{t^3}$ 在 $(0, \infty)$ 递增，利用 Ljusternik-Schnirelmann 理论证明了正解的存在性。

文献 [19] 讨论了如下非线性分数阶 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases} \left(a+b \int_{\mathbb{R}^3} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right|^2 dx \right) (-\Delta)^s u + \lambda V(x)u = f(x)|u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

式中， $\lambda, a, b>0, s \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right)$ ， $2<p<4, V(x)$ 是非负连续函数，且存在 $c>0, V(x)<c$ 有非 0 的有限测度， $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ，并且 $f_{\Omega, \min} = \inf_{x \in \Omega} f(x)>0$ ，应用变分法证明了正解的存在性。

受文献 [14,20] 启发，本文在 $\mathbb{R}^N$ 中研究方程(1)基态解的存在性，其中函数 $f(x)$ 和 $K(x)$ 满足以下假设：

a. $f(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ， $f(x) \geq 0$ ；

b. $\exists M_0>0$ ，s.t. $meas\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq M_0\} < \infty, meas$

表示 $\mathbb{R}^N$ 中的 Lebesgue 测度；

c. $K(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ， $K(x)>0$ ，且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时， $K(x) \rightarrow 0$ 。

如上假设最开始被 Bartsch 等^[14]用于研究非线性 Schrödinger 方程的多重正解。

令

$$H := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} f(x)u^2 dx < +\infty \right\}$$

并且赋予范数

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx, \\ V(x) &= 1 + f(x) \end{aligned}$$

显然，由假设 a 和 b，以及 Poincare 不等式得到嵌入 $H \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ 对于 $2 \leq q \leq 2_s^*$ 是连续的。这保证了如下定义，对 $\forall q \in [2, 2_s^*]$ ，有

$$\begin{aligned} S_q &= \inf_{u \in H} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^q dx = 1 \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

通过假设 a 和 b，以及上面的嵌入结果，可以在 H 上定义如下泛函：

$$I(u) = \frac{a}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \frac{\varepsilon}{4} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx$$

并且 $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ 。众所周知, I 临界点和方程 (1) 弱解之间一一对应。如果 $\exists u \in H$, 使得对 $\forall v \in H$, 有

$$\begin{aligned} & \left(a - \varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right) \cdot \\ & \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^{p-2} uv dx = 0 \end{aligned}$$

则称 u 是方程 (1) 的弱解。

本文的主要结果如下:

定理 1 假设 $f(x)$ 满足假设 a, b, 且 $K(x)$ 满足假设 c, $2 < p < 2_s^*$, 则方程 (1) 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中至少有一个非负的基态解 u 。

2 符号和预备知识

本文中, 除非特别说明, 所有极限都是 $n \rightarrow \infty$ 。此外, 还应用下列符号: C, C_i 和 C^* 为正常数; $L^q(\mathbb{R}^N)$ 表示标准的 Lebesgue 空间, 范数定义为当 $1 \leq q < \infty$ 时, $\|u\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx$, $q = \infty$ 时, $\|u\|_\infty = \text{esssup}_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)|$; 定义 $H := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u^2 dx < +\infty \right\}$, 其范数定义为 $\|u\|^2 = [u]_H^2 + \|u\|_V^2$, 其中 $[u]_H^2 = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy$, $\|u\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^2 dx$; 记 $|u|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx$; H^{-s} 表示 Hilbert 空间 H^s 的对偶空间; $B_R(x)$ 表示在球心 x 处半径 $R > 0$ 的开球; 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $o_n(1) \rightarrow 0$; $\rightarrow$ 和 $\rightharpoonup$ 分别表示强收敛和弱收敛。

为了求解方程 (1) 的基态解, 定义 Nehari 流形

$$M = \{u \in H \setminus \{0\} : G(u) = 0\}$$

其中,

$$\begin{aligned} G(u) : &= \langle I'(u), u \rangle = a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - \\ & \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx \end{aligned}$$

令

$$c = \inf_{u \in M} I(u) \tag{5}$$

引理 1 对 $\forall u \in M$, $\exists \delta, \sigma > 0$, 使得 $\|u\| \geq \delta$ 且

$\langle G'(u), u \rangle \leq -\sigma$ 。

证明 对 $\forall u \in M$, 由式 (4) 中 S_q 的定义, 当 $p=q$ 时

$$0 = \langle I'(u), u \rangle = G(u) =$$

$$\begin{aligned} & a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \\ & \varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx \geq \\ & \min\{a, 1\} \|u\|^2 - \varepsilon \|u\|^4 - |u|_p^p \geq \\ & \min\{a, 1\} \|u\|^2 - \varepsilon \|u\|^4 - S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p \end{aligned}$$

因为 $2 < p < 2_s^*$, 所以存在某个 $\delta > 0$, 使得 $\|u\| \geq \delta$ 。

接下来, 分两种情况讨论。

当 $2 < p \leq 4$ 时, 由 $u \in M$ 和 $\langle I'(u), u \rangle = 0$ 有

$$\begin{aligned} \langle G'(u), u \rangle &= \\ & 2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \\ & 4\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - p \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx = \\ & (2-p)a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + (2-p) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \\ & (4-p)\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 \leq \\ & (2-p)a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + (2-p) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \leq \\ & (2-p) \min\{a, 1\} \|u\|^2 \leq \\ & (2-p) \min\{a, 1\} \delta^2 < 0 \end{aligned}$$

当 $4 < p < 2_s^*$, 对 $u \in M$ 有

$$\begin{aligned} \langle G'(u), u \rangle &= 2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \\ & 4\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - p \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx = \\ & -2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy - 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \\ & (p-4) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx < -2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy - \\ & 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \leq -2 \min\{a, 1\} \|u\|^2 \leq \\ & -2 \min\{a, 1\} \delta^2 < 0 \end{aligned}$$

综上所述, $\exists \delta > 0$ 使得当 $2 < p < 2_s^*$ 时, $\langle G'(u), u \rangle \leq -\sigma, \forall u \in M$ 。

从引理 1 的证明过程可以看出, 对 $2 < p \leq 4$ 的论证稍加修改, 对 $4 < p < 2_s^*$ 也是成立的。因此, 为了简单起见, 只讨论前面一种情形, 对后面一

种的情形也适用。

引理 2 泛函 I 在 M 上是强制的并且下有界。

证明 由引理 1 和 $2 < p \leq 4$, 对 $\forall u \in M$, 有

$$I(u) = \frac{a}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx -$$

$$\frac{\varepsilon}{4} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{p} \right) \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 \geq$$

$$\langle g'_{\rho_u}(0), \phi \rangle =$$

$$\frac{2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx - p \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^{p-2} u \phi dx}{Q}$$

$$\frac{4\varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy}{Q}$$

其中,

$$Q = a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx -$$

$$3\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 -$$

$$(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx$$

证明 令 $u \in M$, 并且定义 $F: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$F(t, w) = at \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-w)(x) - (u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy +$$

$$t \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u - w|^2 dx -$$

$$\varepsilon t^3 \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-w)(x) - (u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 -$$

$$t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u - w|^p dx$$

因为 $u \in M$, 有 $F(1, 0) = 0$ 。通过引理 1, 当 $2 < p \leq 4$ 时, 有

$$F_t(1, 0) = a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx -$$

$$3\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx =$$

$$(2-p)a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + (2-p) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx -$$

$$\varepsilon(4-p) \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 \leq$$

$$(2-p)a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + (2-p) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \leq$$

$$(2-p) \min\{a, 1\} \|u\|^2 \leq$$

$$(2-p) \min\{a, 1\} \delta^2 < 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \geq$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \min\{a, 1\} \|u\|^2$$

所以, 当 $\|u\| \rightarrow \infty$ 时, 得到 $I(u) \rightarrow \infty$ 。此外, 由引

理 1 可知, 对 $\forall u \in M$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\|u\| \geq \delta$, 那么

$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \min\{a, 1\} \delta^2$ 可以作为 $I(u)$ 在 M 上的下界, 所以

以 $I(u)$ 在 M 下有界。

引理 3 对任意给定的 $u \in M$, 存在 $\rho_u > 0$ 和连续函数 $g_{\rho_u}: B_{\rho_u}(0) \rightarrow \mathbb{R}^+$, 对 $w \in H$, $w \in B_{\rho_u}(0)$, 使得 $g_{\rho_u}(0) = 1$, $g_{\rho_u}(w)(u - w) \in M$, 并且

对 F 在点 $(1, 0)$ 处用隐函数定理, 可以推断出 $\exists \rho_u > 0$, 满足对 $\forall w \in H$, $\|w\| < \rho_u$, 方程 $F(t, w) = 0$ 有一个唯一的连续解 $t = g_{\rho_u}(w) > 0$, $g_{\rho_u}(0) = 1$ 。因为对 $\forall w \in H$, $\|w\| < \rho_u$, 有 $F(g_{\rho_u}(w), w) = 0$, 所以,

$$0 = a g_{\rho_u}(w) \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-w)(x) - (u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy +$$

$$g_{\rho_u}(w) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u - w|^2 dx -$$

$$\varepsilon g_{\rho_u}^3(w) \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-w)(x) - (u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 -$$

$$g_{\rho_u}^{p-1}(w) \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u - w|^p dx$$

等式两边同时乘 $g_{\rho_u}(w)$ 可得,

$$0 = a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|g_{\rho_u}(w)(u-w)(x) - g_{\rho_u}(w)(u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy +$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |g_{\rho_u}(w)(u-w)|^2 dx -$$

$$\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|g_{\rho_u}(w)(u-w)(x) - g_{\rho_u}(w)(u-w)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 -$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x) |g_{\rho_u}(w)(u-w)|^p dx$$

则有 $g_{\rho_u}(w)(u - w) \in M$, $\forall w \in H$, $\|w\| < \rho_u$ 。所以, 对

$\forall \phi \in H$, $r > 0$, 有

$$\begin{aligned}
F(1, 0 + r\phi) - F(1, 0) &= a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u - r\phi)(x) - (u - r\phi)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u - r\phi|^2 dx - \\
&\varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u - r\phi)(x) - (u - r\phi)(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u - r\phi|^p dx - a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \\
&\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^2 dx + \varepsilon \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^p dx = -a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left(2r \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} \right) dx dy - \\
&r^2 [\phi]_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (2ru\phi - r^2\phi^2) dx + \varepsilon \left[2[u]_H^2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left(\left(2r \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} - r^2 \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} \right) dx dy \right) - \right. \\
&\left. \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left(2r \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} - r^2 \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} \right) dx dy \right)^2 \right] - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) (|u - r\phi|^p - |u|^p) dx
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\langle F_w, \phi \rangle|_{t=1, w=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(1, 0 + r\phi) - F(1, 0)}{r} = -2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \\
&2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx + 4\varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + p \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^{p-2} u \phi dx
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
\langle g'_{\rho_u}(0), \phi \rangle &= -\frac{\langle F_w, \phi \rangle}{F_t}|_{t=1, w=0} = \\
&\frac{2a \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx - p \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u|^{p-2} u \phi dx}{Q} - \\
&\frac{4\varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy}{Q}
\end{aligned}$$

引理 4 对 $\forall u \in H \setminus \{0\}$, 存在唯一的 $t(u) > 0$ 使得 $t(u)u \in M$, 并且 $I(t(u)u) = \max_{t>0} I(tu)$ 。

证明 采用与文献 [21] 中引理 4.1 类似的证明方法。固定 $u \in H \setminus \{0\}$ 并且在 $[0, \infty)$ 定义函数 $g(t) := I(tu)$, 可得

$$\begin{aligned}
g'(t) = 0 &\Leftrightarrow at[u]_H^2 + t\|u\|_V^2 - \varepsilon t^3[u]_H^4 - t^{p-1}|u|_p^p = 0 \Leftrightarrow \\
&t(a[u]_H^2 + \|u\|_V^2) = \varepsilon t^3[u]_H^4 + t^{p-1}|u|_p^p \Leftrightarrow \\
&\|u\|^2 = \varepsilon t^2[u]_H^4 + t^{p-2}|u|_p^p
\end{aligned}$$

公式右边是关于 t 的递增函数。很容易验证: 当 $t > 0$ 且很小时, $g(t) > 0$; 当 t 充分大时, $g(t) < 0$ 。因此, 在唯一 $t = t(u)$ 时取得 $\max_{t \in [0, \infty)} g(t)$, 所以 $g'(t(u)) = 0$, $t(u)u \in M$ 。

引理 5 存在一个序列 $\{u_n\} \subset M$, 使得 $u_n \geq 0$, $I(u_n) \rightarrow c$, 且 $I'(u_n) \rightarrow 0$ 。

证明 由引理 2, 用 Ekeland 变分法构造一个极小化序列 $\{u_n\} \subset M$, 且满足以下性质:

a. $I(u_n) \rightarrow c$;

b. $I(z) \geq I(u_n) - \frac{1}{n} \|u_n - z\|$, $\forall z \in M$ 。

由 $I(|u|) = I(u)$, 可以假设在 $\mathbb{R}^N$ 中 $u_n \geq 0$ 。令 $0 < \rho <$

$\rho_n \equiv \rho_{u_n}$, $g_n \equiv g_{\rho_{u_n}}$, 其中 ρ_{u_n} , $g_{\rho_{u_n}}$ 如引理 3 中定义。令 $U_\rho = \rho u$, $\|u\| = 1$ 。固定 n , 且令 $z_\rho = g_n(U_\rho)(u_n - U_\rho)$ 。因为 $z_\rho \in M$, 通过性质 b 可以得到

$$I(z_\rho) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n} \|z_\rho - u_n\|$$

泰勒展开可得

$$\langle I'(u_n), z_\rho - u_n \rangle + o(\|z_\rho - u_n\|) \geq -\frac{1}{n} \|z_\rho - u_n\|$$

因此,

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_n), -U_\rho + (g_n(U_\rho) - 1)(u_n - U_\rho) \rangle &\geq \\
&-\frac{1}{n} \|z_\rho - u_n\| + o(\|z_\rho - u_n\|)
\end{aligned}$$

这意味着,

$$\begin{aligned}
-\rho \langle I'(u_n), u \rangle + (g_n(U_\rho) - 1) \langle I'(u_n), u_n - U_\rho \rangle &\geq \\
&-\frac{1}{n} \|z_\rho - u_n\| + o(\|z_\rho - u_n\|)
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_n), u \rangle &\leq \frac{1}{n} \frac{\|z_\rho - u_n\|}{\rho} + \frac{o(\|z_\rho - u_n\|)}{\rho} + \\
&\frac{g_n(U_\rho) - 1}{\rho} \langle I'(u_n), u_n - U_\rho \rangle
\end{aligned} \quad (6)$$

由 $\|u\| = 1$ 、引理 3 和 $\{u_n\}$ 的有界性可得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|g_n(U_\rho) - 1|}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|g_n(0 + \rho u) - g_n(0)|}{\rho} = \langle g'_n(0), u \rangle \leq \|g'_n(0)\| \leq c_1$$

又因为,

$$\begin{aligned} \|z_\rho - u_n\| &= \|g_n(U_\rho)(u_n - U_\rho) - (u_n - U_\rho) - U_\rho\| = \\ &\| (g_n(U_\rho) - 1)(u_n - U_\rho) - U_\rho \| \leq \\ &\|g_n(U_\rho) - 1\| \|u_n - U_\rho\| + \|U_\rho\| = \\ &\|g_n(U_\rho) - 1\| c_2 + \rho \end{aligned}$$

此外, 对于固定的 n , 因为 $\langle I'(u_n), u_n \rangle = 0$, 并且当 $\rho \rightarrow 0$ 时在 H 中 $(u_n - U_\rho) \rightarrow u_n$, 通过令式(6)中 $\rho \rightarrow 0$, 可以得出 $\langle I'(u_n), u \rangle \leq \frac{c}{n}$, 即 $I'(u_n) \rightarrow 0$.

3 Palais-Smale 条件

引理 6 假设 a, b, c 成立, 对 $\forall c \in \mathbb{R}$, I 满足 $(PS)_c$ 条件。

证明 由引理 5 可知, $\exists \{u_n\} \subset M$ 满足 $I(u_n) \rightarrow c$ 。此外, 由引理 2 可知, I 在 M 上强制, 因此, 可以得到 $\{u_n\}$ 在 H 中有界。不妨设, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M^*$, 进一步 $\exists u \in H$ 使得

$$\begin{cases} \text{在 } H \text{ 中 } u_n \rightharpoonup u \\ \text{在 } L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), r \in [2, 2^*) \text{ 中 } u_n \rightarrow u \\ \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 中 几乎处处 } u_n \rightarrow u \end{cases} \quad (7)$$

为了证明 $\{u_n\}$ 在 H 中强收敛到 u , 定义泛函 $\phi_v(\varphi)$ 为

$$\phi_v(\varphi) = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v(x) - v(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

对固定的 v 和任意 $\varphi \in H$, 很容易验证得到 $\phi_v(\varphi)$ 是 H 上连续线性泛函, 由 Hölder 不等式, 有 $|\phi_v(\varphi)| \leq \|v\| \|\varphi\|$ 。

定义对 $\forall t \geq 0$, $M(t) = a - \varepsilon t$, 其中 $a > 0$ 。由于 $\|u_n\| \leq M^*$, 那么 $\exists \varepsilon^* > 0$, 使得 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon M^* < a$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle = \\ &M([u_n]_H^2) [\phi_{u_n}(u_n - u) - \phi_u(u_n - u)] + \\ &\left[M([u_n]_H^2) - M([u]_H^2) \right] \phi_u(u_n - u) + \\ &\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)^2 dx - \\ &\int_{\mathbb{R}^N} K(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) (u_n - u) dx := \\ &A_1 + A_2 + A_3 - A_4 \end{aligned} \quad (8)$$

其中,

$$A_1 := M([u_n]_H^2) [\phi_{u_n}(u_n - u) - \phi_u(u_n - u)]$$

$$A_2 := \left[M([u_n]_H^2) - M([u]_H^2) \right] \phi_u(u_n - u)$$

$$A_3 := \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)^2 dx$$

$$A_4 := \int_{\mathbb{R}^N} K(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) (u_n - u) dx$$

由 $M(t)$ 的连续性和 H 中 $\{u_n\}$ 的有界性, 可以推断出 $[M([u_n]_H^2) - M([u]_H^2)]$ 是有界的。因此, 由方程(7)和 $\phi_v(\varphi)$ 的定义, 有 $A_2 = o_n(1)$ 。

接下来, 证明 $A_4 = o_n(1)$ 。由假设 c, $\forall \tau > 0$, $\exists R > 0$ 使得, 当 $x \in B_R^c(0)$ 时, $|K(x)| \leq \tau$ 。

$$\begin{aligned} |A_4| &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right| |u_n - u| dx \leq \\ &\int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left| |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \right| |u_n - u| dx = \\ &\int_{B_R(0)} K(x) \left| |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \right| |u_n - u| dx + \\ &\int_{B_R^c(0)} K(x) \left| |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \right| |u_n - u| dx \leq \\ &\|K\|_{L^\infty} \int_{B_R(0)} \left| |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \right| |u_n - u| dx + \\ &\tau \int_{B_R^c(0)} \left| |u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \right| |u_n - u| dx \leq \\ &C_1 \|K\|_{L^\infty} \|u_n - u\|_{L^p(B_R(0))} + C_2 \tau \|u_n - u\|_{L^p(B_R^c(0))} \leq \\ &C^* \|u_n - u\|_{L^p(B_R(0))} + \tau^* \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

由 τ 的任意性、式(7)和 $\{u_n\}$ 的有界性, 有 $A_4 = o_n(1)$ 。因此, 通过式(8), 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $A_1 + A_3 = o_n(1)$ 。

下面引入 Simon 不等式^[19], 对 $\forall \psi, \varphi \in \mathbb{R}^N$, 有

$$|\psi - \varphi|^p \leq \begin{cases} c(|\psi|^{p-2} \psi - |\varphi|^{p-2} \varphi)(\psi - \varphi), p \geq 2 \\ c \left[(|\psi|^{p-2} \psi - |\varphi|^{p-2} \varphi)(\psi - \varphi) \right]^{\frac{p}{2}} \\ \quad [|\psi|^p + |\varphi|^p]^{\frac{2-p}{2}}, 1 < p < 2 \end{cases} \quad (9)$$

其中, c 为与 p 有关的一个正常数。

由 Simon 不等式和 A_1, A_3 的定义可以得到, $A_1 = A_3 = o_n(1)$ 。那么, 由式(9), $A_1 = o_n(1)$, $A_3 = o_n(1)$, 可以得到

$$\begin{aligned} o_n(1) &= c [\phi_{u_n}(u_n - u) - \phi_u(u_n - u)] = \\ &c \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{[(u_n(x) - u_n(y)) - (u(x) - u(y))]^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \\ &\quad [u_n - u]_H^2 \end{aligned} \quad (10)$$

并且

$$\|u_n - u\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)^2 dx = o_n(1) \quad (11)$$

结合式(10)和(11), 可以得到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|u_n - u\| = o_n(1)$ 。

4 主要结果的证明

现给出定理 1 的证明。

证明 由引理 1 和引理 2, 验证了泛函 I 在 M 上强制且有下界。因此, 应用 Ekeland 变分原理, 存在一个有界极小化序列, 然后通过引理 5, 可以证明该极小化序列满足 $u_n \geq 0$, $I(u_n) \rightarrow c$, $I'(u_n) \rightarrow 0$, 即 $(PS)_c$ 序列。接下来, 在引理 6 中, 验证了泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件, 得到在 H 中 $u_n \rightarrow u$ 。综上所述可得, $I(u) = c$, $I'(u) = 0$, 且 $u \geq 0$, 为方程 (1) 的一个弱解。此外, 因为 $I(u) = c = \inf_{v \in M} I(v)$, 所以 u 是方程 (1) 的一个基态解。

参考文献:

- [1] FRANZINA G, PALATUCCI G. Fractional p -eigenvalues[J]. *Rivista Di Matematica Della Universita Di Parma*, 2014, 5(2): 373–386.
- [2] IANNIZZOTTO A, LIU S B, PERERA K, et al. Existence results for fractional p -laplacian problems via Morse theory[J]. *Advances in Calculus of Variations*, 2016, 9(2): 101–125.
- [3] LINDGREN E, LINDQVIST P. Fractional eigenvalues[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2014, 49(1/2): 795–826.
- [4] KIRCHHOFF G. *Mechanik*[M]. Leipzig: Teubner, 1883.
- [5] LIONS J L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics[J]. *North-Holland Mathematics Studies*, 1978, 30: 284–346.
- [6] TOLKSDORF P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 1984, 51(1): 126–150.
- [7] POHOŽAEV S I. A certain class of quasilinear hyperbolic equations[J]. *Matematicheskii Sbornik*, 1975, 96(138): 152–166, 168.
- [8] LI G B, YE H Y. Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, 257(2): 566–600.
- [9] LIU Z S, GUO S J. Existence of positive ground state solutions for Kirchhoff type problems[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2015, 120: 1–13.
- [10] PUCCI P, XIANG M Q, ZHANG B L. Existence and

multiplicity of entire solutions for fractional p -Kirchhoff equations[J]. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2016, 5(1): 27–55.

- [11] SU Y, WANG L, CHEN H B, et al. Multiplicity and concentration results for fractional Choquard equations: doubly critical case[J]. *Nonlinear Analysis*, 2020, 198: 111872.
- [12] SU Y. New result for nonlinear Choquard equations: doubly critical case[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 102: 106092.
- [13] SU Y, CHEN H B. Fractional Kirchhoff-type equation with Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponent[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 78(6): 2063–2082.
- [14] BARTSCH T, WANG Z Q. Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2000, 51(3): 366–384.
- [15] SECCHI S. Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, 54(3): 031501.
- [16] LIU L T, CHEN H B, YANG J. Positive solutions for fractional Kirchhoff type problem with steep potential well[J]. *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2022, 45: 549–573.
- [17] HE X M, ZOU W M. Multiplicity of concentrating solutions for a class of fractional Kirchhoff equation[J]. *Manuscripta Mathematica*, 2019, 158(1/2): 159–203.
- [18] YANG J, CHEN H B. Existence of positive solutions to the fractional Kirchhoff-type problems involving steep potential well[J/OL]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2021. [2021-09-06]. <https://doi.org/10.1080/17476933.2021.1971659>.
- [19] LIU S L, CHEN H B, YANG J, et al. Existence and nonexistence of solutions for a class of Kirchhoff type equation involving fractional p -Laplacian[J]. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2020, 114(3): 161.
- [20] QIAN X T, CHAO W. Existence and concentration of ground state solutions for a class of nonlocal problem in $\mathbb{R}^N$ [J]. *Nonlinear Analysis*, 2021, 203: 112170.
- [21] WILLEM M. *Minimax theorems*[M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

(编辑: 丁红艺)