

无黏性颗粒柱坍塌流动的尺度效应分析

孙英皓, 牛志扬, 王等明

(兰州大学 土木工程与力学学院, 兰州 730000)

摘要: 为分析离散介质流动性的尺度效应, 揭示工程实际中不同尺度质量流的瞬态流动行为, 运用粒子高速测量装置和自主搭建的准二维颗粒坍塌实验平台, 对无黏性颗粒柱在重力驱动下的坍塌流动过程进行了研究, 通过粒子图像测速(PIV)技术分析了柱体纵横比和初始尺寸对颗粒坍塌后流动性和堆积形态的影响。研究表明, 不同初始长度的颗粒柱坍塌后流动前端位置随时间的演化表现出了相似的特征, 但是系统尺寸的变化对其最终的堆积形态会产生明显的影响, 尤其是流动距离。通过分析尺度效应消失的临界长度, 建立了无黏性颗粒柱坍塌后流动距离与其纵横比和初始长度之间满足的标度关系, 该关系可以准确描述系统尺寸变化对颗粒流动性产生的影响。

关键词: 颗粒物质; 坍塌; 流动距离; 尺度效应; PIV 技术; 标度律

中图分类号: O 363.1 文献标志码: A

Analysis of size effect in the collapse and flow of cohesionless granular columns

SUN Yinghao, NIU Zhiyang, WANG Dengming

(College of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: In order to analyze the size effect in discrete material flow and reveal transient behaviors of the mass flows in engineering practice at different scales, the experiment systematically investigated the collapse and flow process of the cohesionless granular columns driven by gravity using the particle high-speed measurement device and a constructed quasi-2D particle collapse experimental platform. The influences of column aspect ratio, as well as initial system size on the mobility and deposit morphology of the collapsing material were mainly analyzed by the particle image velocimetry (PIV) technique. The results showed that the flow front position of the granular columns with different initial lengths exhibited similar evolving characteristics with time, but the size change of the system had a significant effect on its final deposit morphology, especially the flow distance. By analyzing the critical length at which the size effect disappears, a scaling law of flow distance of a granular column with its aspect ratios and initial length was proposed, which can be used to accurately characterize the effect of column size on the mobility of collapsing material.

收稿日期: 2023-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12272158, 11872028)

第一作者: 孙英皓(1997-), 男, 硕士研究生。研究方向: 颗粒物质力学。E-mail: sunyh2021@lzu.edu.cn

通信作者: 王等明(1978-), 男, 教授。研究方向: 颗粒物质力学。E-mail: dmwang@lzu.edu.cn

Keywords: granular material; collapse; flow distance; size effect; PIV technique; scaling law

颗粒物质在自然环境和工程领域中广泛存在,例如岩土、矿石、道砟、粮食和煤炭等^[1]。这些材料通常为大量种类不同、形态各异的离散固体颗粒的形式,但在外界因素诱发下会发生屈服并产生流动,在此过程中会呈现出极为复杂的动力学行为^[2]。这种流动具有瞬态、高速和强冲击等典型特征,通常会给周围环境、设施以及人员的安全带来严重危害^[3-4]。因此,选择具有典型离散和能量耗散特性的颗粒物质,对其在特定构型和状态下的流动行为进行定量分析,是深入理解上述离散类介质复杂流动过程并揭示其蕴含的基本物理机制的一种重要途径。

重力驱动下颗粒物质的坍塌流动过程,通常包含坍塌触发、流动扩展和减速沉积3个典型阶段,呈现出与自然情形下诸多复杂地质灾害过程如雪崩、岩崩、碎屑流、滑坡等极为相似的动力学特征^[5]。作为一种简化的构型,Lube等^[6]最早进行了颗粒柱坍塌实验,研究了系统在重力驱动下的瞬态动力学行为,实验测量了颗粒坍塌后的流动持续时间 T_f 以及最终的颗粒沉积形态,包括流动距离 L_f 和堆积高度 H_f 等^[7-9]。颗粒柱坍塌实验由于系统初始状态简单可控、实验可重复性好且流动包含了丰富的动力学行为等,被认为是深入理解复杂质量流瞬态流动过程的一种有效途径。Lajeunesse等^[7]通过相似的实验发现,颗粒柱的初始纵横比 $a = H_i/L_i$ 是决定坍塌颗粒流动持续时间及最终流动距离的关键因素^[5], L_i 和 H_i 分别代表柱体的初始长度和高度。此外,实验结果证实归一化流动距离与柱体纵横比满足特定的分段幂律关系,即 $(L_f - L_i)/L_i \propto \lambda a^\beta$ 。其中: β 为常数; λ 是依赖于颗粒材料属性的拟合系数。当纵横比 a 逐渐增大并超过其临界值 a^* (通常 $a^* \approx 3$)时,两者之间的关系会从线性转变为指数 β 为2/3的幂律关系。此后,更多学者采用不同初始构型和属性各异的颗粒材料,通过数值模拟和实验测量等手段对颗粒柱的坍塌过程进行了更为系统和深入的研究,进一步证实了上述沉积形态特征量与柱体纵横比所满足的依赖关系,即使拟合参数和指数在不同条件和构型下会存在微小的差异。

随着研究工作的逐渐深入,近些年有研究发现^[8-12],系统的相对大小,即系统的宏观尺寸与粒子尺寸的比值,可能会对颗粒柱的坍塌结果产生

影响,表现出了所谓的系统尺寸效应。Warnett等^[8]通过轴对称颗粒柱的坍塌实验发现,坍塌后的堆积半径除了和以往观测一致的纵横比 a 有关之外,还明显依赖于柱体的初始半径与颗粒直径的比值 r_0/d 。Cabrera等^[9]利用离散元方法模拟了准二维颗粒柱的坍塌过程,发现系统-粒子的尺寸比确实会对颗粒柱体的坍塌流动行为和持续时间产生影响,并证实以前相关的研究结果差异可能是系统的尺寸效应所致。模拟结果显示高柱和低柱对应的系统尺寸效应消除的临界系统-粒子尺寸比是不同的。近期的实验和模拟研究^[12]进一步证实了水下颗粒柱体的坍塌流动行为也存在明显的尺寸效应,在相同的初始纵横比下,更大尺度的颗粒柱在坍塌过程中往往伴随着更明显的颗粒间接触润滑作用,进而导致更高的颗粒流动性和更长的归一化流动距离。

由此可见,颗粒系统的坍塌流动过程会受到系统自身尺寸的影响,同时这种影响又依赖于系统的初始构型。目前的研究更多关注的是特定尺寸的系统坍塌流动对其初始纵横比的依赖性,而对于两种因素的耦合影响目前还缺乏系统的分析。因此,本文基于自行设计的颗粒坍塌实验装置,采用粒子高速测量方法定量分析了系统尺寸的变化对无黏性颗粒柱坍塌后动力学行为的影响。在此基础上,通过系统尺寸参数的变化探讨了系统尺寸与初始纵横比对颗粒堆积形态的耦合影响。最后,分别建立了柱体纵横比和初始长度影响下描述无黏性颗粒柱体坍塌后流动距离的标度律。

1 实验平台和测量方法

1.1 实验装置和方法

实验构建的准二维颗粒柱坍塌实验构型如图1所示。该装置的主要组成部分为一个截面为矩形的水平槽道,其沿着 x , y , z 方向的长度分别为: $L = 120\text{ cm}$; $W = 11\text{ cm}$; $H = 60\text{ cm}$ 。坐标原点设置在槽道底部的左侧,并在侧壁上粘贴有标定纸。槽道的前后侧壁均为钢化玻璃,前壁保持透明以便于高速相机的数据采集,而后壁外侧则覆盖一层黑色墙纸,以增加获取图像的对比度。槽道底部粘贴一层粗糙系数为60目的砂纸,用于生成颗粒流动的粗糙水平表面。实验前,一块外表

光滑且坚硬的矩形铝合金挡板被竖直放置在 $x = L_i$ 处，从而在槽道左侧围成一个用于填装颗粒的柱体。挡板放置的位置可以沿着水平方向任意移动，以此改变颗粒柱体的初始长度。

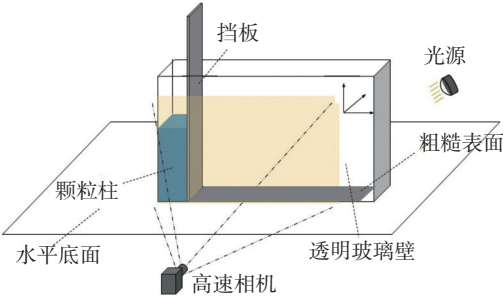


图 1 颗粒柱坍塌的实验装置示意图

Fig.1 Experimental device for the collapse of granular columns

实验中选用了密度为 2510 kg/m^3 ，粒径为 $(0.7 \pm 0.1) \text{ mm}$ 的玻璃微珠，其休止角约为 $(26.3^\circ \pm 1.0^\circ)$ 。玻璃的主要成分为二氧化硅和其他氧化物，与自然界中沙砾、石块等介质的主要成分接近。玻璃微珠可以借助长颈漏斗注入挡板和槽道围成的柱体内，最后用刮板整平表面以形成设定高度的颗粒柱。通过改变挡板放置的位置 L_i (即柱体的初始长度) 和注入颗粒的高度 H_i ，可以得到不同初始纵横比 $a = H_i/L_i$ 的颗粒柱。对于固定的初始长度 L_i/d ，实验中通过改变柱体的高度 H_i/d ，使得颗粒柱纵横比 a 的变化基本保持在 $0.5 \sim 7.0$ 。为了系统地研究尺寸效应，柱体的初始长度 L_i/d 可以在 $40 \sim 180$ 的范围内变化。

实验开始时，垂直放置的挡板被撤除，柱体内的颗粒在重力作用下发生坍塌，随后会沿着槽道向右侧扩展流动，最终在槽道内形成一个长度为 L_f 、高度为 H_f 的楔形堆积体。实验中为了消除边界效应，实验槽道的宽度设置足够大 ($W > 150d$)，确保槽道侧壁的摩擦对颗粒运动产生的影响可以被忽略^[13]，此时，颗粒在槽道内的流动可以近似为二维流动。此外，为了尽量减小挡板撤离时对柱体内颗粒产生的初始扰动，实验中选择定轴转动的方式以较快的速度转动撤除挡板。根据前人的研究结果^[14-16]，若挡板的撤除速度大于 $0.4\sqrt{gH_i}$ (g 为重力加速度)，只会对柱体右侧与挡板接触的颗粒产生微弱的影响，而这种初始的扰动并不会对颗粒的水平扩展流动产生明显的影响。

1.2 数据测量和分析

实验中，借助在槽道前侧安置的高速摄像机

(IDT NR4S1)，全程记录颗粒柱的坍塌和流动过程。高速相机的拍摄视窗约为 $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ ，采集帧率为 500 f/s ，最大分辨率为 $2304 \text{ px} \times 1720 \text{ px}$ 。为了获得更加清晰的拍摄效果，实验在相对灰暗的室内空间进行，同时配备与高速相机配套的专业光源 (FL240NO-003) 作为照明光源，以提高拍摄图片的清晰度。光源工作功率为 240 W ，可与高速相机通过中控机同步控制，以确保实验过程中光照环境的稳定。

实验开始前，通过调整相机的位置，确保实验平台和颗粒流动在图片中以二维状态呈现。同时通过调节光源位置和焦距，以达到最清晰的观测效果。高速相机拍摄的图片可以通过中控机传输到电脑终端。基于粒子图像测速 (PIV) 技术可以方便地分析坍塌过程中颗粒流的瞬时速度场，进而可以发现坍塌颗粒流动前端位置随时间变化的演化特征。干燥颗粒在流动过程中，前端颗粒剧烈碰撞会产生飞溅，导致流动前端的位置很难识别。因此，测量时将右端无明显缝隙的双层堆叠颗粒作为流动前端，使用软件 imageJ 对拍摄的图片进行分析。通过图片中像素长度和真实长度的转换比例，测量出颗粒的流动距离。为了保证实验结果符合真实情况，每组实验重复 $2 \sim 3$ 次，并用最终流动距离的平均值作为实验结果。

2 不同尺寸颗粒柱坍塌后的流动和沉积

2.1 基本坍塌动力学行为

首先，观测纵横比 a 相同但初始长度 L_i/d 不同的两个颗粒柱坍塌后颗粒构型的瞬时状态演化特征，如图 2 所示。图中提供了两组纵横比下 4 个不同瞬时刻的实验结果进行对比。从图中可以看出，颗粒柱坍塌过程明显可以分为两个阶段：第一阶段主要是柱体上部颗粒发生自由下落，柱体顶部的形态几乎保持不变，而柱体底部向右逐渐发生屈服流动；第二阶段表现为坍塌颗粒的水平扩展，在此阶段，颗粒流动距离快速增加且伴随着颗粒层厚度不断减小。当颗粒层的厚度趋近稳定时，坍塌颗粒前端的流动几乎停止。最后在水平基底上形成上表面连续且近似平滑的沉积体。在相同的初始纵横比下，堆积体的形态存在典型的自相似特征。这种坍塌过程与以往相似实验中观测到的无黏性颗粒材料的实验结果基本一

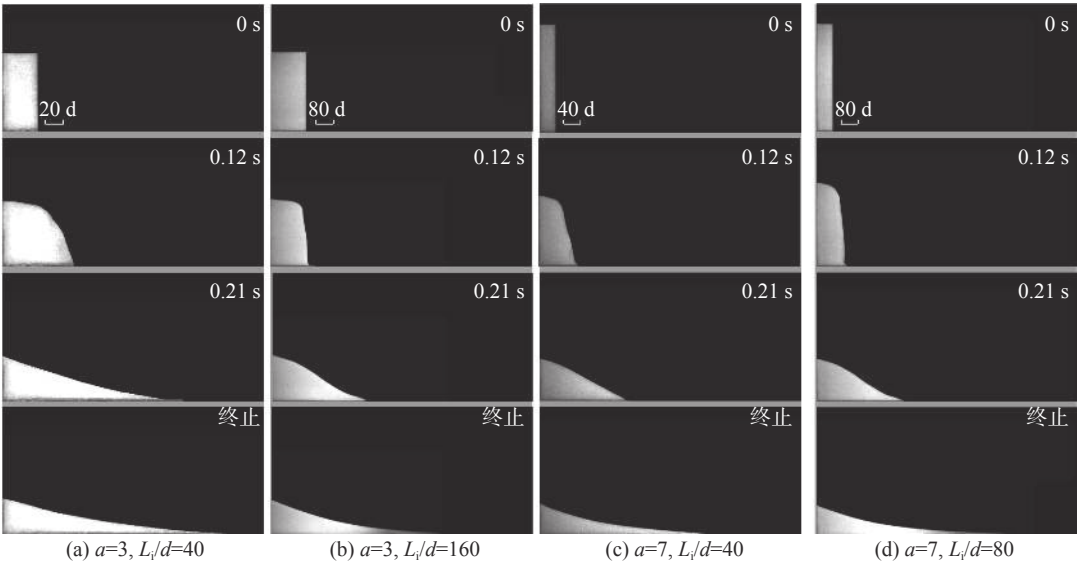


图2 不同瞬时时刻颗粒柱坍塌过程中颗粒的堆积构型

Fig.2 Deposit configuration of granular columns during the collapse at several instantaneous moments

致^[17-18]。需要说明的是，尽管本实验采用了具有不同初始长度的柱体，但是颗粒堆积构型的演化在宏观尺度上几乎观测不到明显的差异，这种现象在两种不同纵横比下几乎都是相同的。

为了研究柱体初始长度对颗粒坍塌动力学行为的影响，本文在每个纵横比下定量分析了两种不同初始长度的颗粒柱坍塌后流动前端的位置随时间变化的演化特征，如图3所示。图中给出了几个典型纵横比下的实验结果，并将描述柱体顶部颗粒自由下落高度 H_i 所用时间 $\tau_c = \sqrt{H_i/g}$ 作为特征时间对时间进行归一化处理。图中， L_x 表示坍塌颗粒流动前端的瞬时位置，虚线用来区分颗粒柱坍塌过程中的3个阶段。可以看出，流动前端随时间的演化近似呈现为S形的曲线，这意味着根据颗粒流动前端的速度演化特征，可以将坍塌过程划分为3个典型的阶段，即前期的加速、中期的匀速扩展和后期的减速沉积^[19-20]。

此外，通过不同初始构型柱体的坍塌实验结果对比可知，归一化流动前端的位置随着归一化时间始终满足相似的演化特征，即流动总的持续时间为 $3.3 \tau_c$ 。其中，包括时长为 $0.8 \tau_c$ 的加速阶段、持续约为 $1.9 \tau_c$ 的匀速阶段和持续约为 $0.6 \tau_c$ 的减速阶段，这与已有相似条件下干颗粒的坍塌流动结果基本吻合。更为重要的是，柱体纵横比和初始长度的变化似乎并不会对坍塌颗粒流动前端的扩展特征产生明显影响，包括流动的典型阶段以及不同阶段的持续时间。但是，这种系统尺寸的变化会定量改变流动前端的速度大小，导致

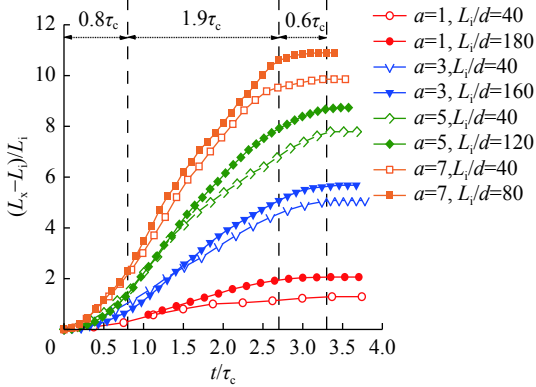


图3 典型纵横比下不同初始长度颗粒柱的归一化流动前端随时间的变化

Fig.3 Normalized flow front position over time for the collapse of granular columns with different initial lengths and representative aspect ratios

最终的流动距离会有定量的变化。

2.2 沉积形态的尺寸效应

从上面的实验结果可以看出，尽管不同初始长度的柱体坍塌后流动前端的位置近似遵循相似的时间演化特征，但是最终的沉积形态存在明显的差异。为了定量分析这种差异，实验通过系统改变柱体的初始长度，观测并记录了坍塌颗粒稳定后的沉积形态。图4给出了两个柱体纵横比下的实验结果，其中，柱体初始长度 L_i/d 的变化范围为40~140。为了更加直观地对比不同初始长度的颗粒柱坍塌后的流动距离，本文对图片的比例进行了缩放处理，即对于给定纵横比 a 但具有不同初始长度 L_i/d 的颗粒柱，缩放后在坍塌初始时刻具有相同的长度和高度。

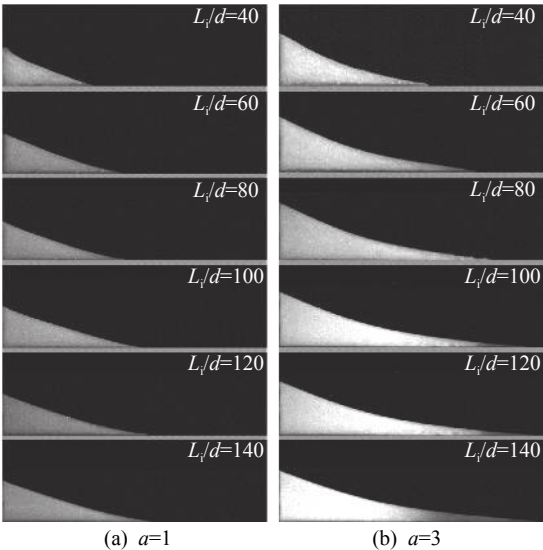


图 4 不同初始长度的颗粒柱坍塌后的堆积形态

Fig. 4 Stacking patterns of the granular columns with different initial lengths after collapse

通过实验结果可以发现, 对于给定纵横比的颗粒柱, 坍塌后颗粒的沉积形态相似, 但是流动距离存在差异。对于 $a = 1$ 的情形, 随着 L_i/d 的增大, 沉积形态会从梯形转变为楔形结构, 如图 4(a) 所示。当初始尺寸 $L_i/d < 80$ 时, 流动距离会随着 L_i/d 的增大而明显变长。但是当 $L_i/d > 120$ 时, 流动距离似乎不再发生明显的变化。而对于更大纵横比的情形, 即 $a = 3$ 时, 不同初始长度的柱体坍塌后的沉积形态近似都为楔形结构, L_i/d 足够大时, 归一化后的沉积形态几乎不再发生变化。

为了定量分析这种系统尺寸变化对沉积形态产生的影响, 本文在不同纵横比下, 统计了归一化的流动距离 $L^* = (L_f - L_i)/L_i$ 随着柱体初始长度变化的规律, 如图 5 所示, 其中, 实心符号表示实验测得的颗粒归一化流动距离。从图中可以看出, 柱体的初始长度会对流动距离产生影响: 在 L_i/d 比较小时, 流动距离会随着 L_i/d 的增大而快速增大; 但是当 L_i/d 足够大时, 这种影响会逐渐减小, 归一化的流动距离不再有显著增长, 此时颗粒的沉积形态主要由纵横比 a 决定。这种尺寸效应随着系统尺寸的增大而逐渐减弱的现象与已有的实验和数值模拟结果基本一致^[8-9]。与此同时, 从实验结果可以发现, 尺寸效应消失的系统临界尺寸依赖于柱体的初始纵横比 a 。随着 a 的增大, 临界尺寸会轻微地减小, 最后趋于稳定, 表现出连续变化的趋势。由此可见, 对于系统尺寸较小的颗粒柱, 坍塌后颗粒的沉积形态会受到柱体纵横比和初始长度的共同影响, 两个参数对流动产生

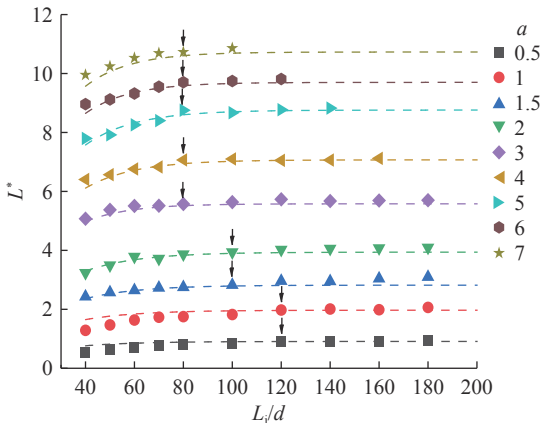


图 5 不同纵横比 a 的颗粒柱坍塌后归一化流动距离随着柱体初始长度 L_i/d 变化的规律

Fig. 5 Variation of the normalized flow distance with initial column length L_i/d after the collapse of granular columns with different aspect ratios

促进作用。而增大颗粒柱纵横比和初始长度对颗粒柱初始时刻的影响均为使颗粒柱势能增大, 使颗粒的流动更加充分。但是当系统势能足够大时, 由于大部分的粒子会经历水平扩展过程, 其最终的堆积势能也会相应增大, 因此系统初始势能增大引起颗粒流动性的增大会逐渐饱和。同时增大颗粒柱的初始长度会使颗粒之间的局部摩擦系数 μ 变大, 改变颗粒流动状态^[21-22], 最终使系统尺寸效应消失。当初始纵横比较大时, 只需要较小的初始尺寸即可达到流动的饱和状态, 因此, 尺寸效应消失的临界初始长度会随着柱体纵横比的增大而逐渐减小。

2.3 考虑尺寸效应的形态标度律

由上面的分析可知, 颗粒柱的初始长度会对沉积形态尤其是坍塌颗粒最终的流动距离产生影响, 下面将此因素引入与沉积形态相关的标度律中。首先给出不同初始长度下颗粒柱坍塌后流动距离与其初始纵横比 a 之间的关系, 如图 6 所示。

从图 6 中可以看出, 初始长度 L_i/d 不同时, 流动距离存在一定的差异, 表现出随着 L_i/d 增大而增加的趋势, 但是当 L_i/d 足够大时, 流动距离几乎不再发生变化。这说明尺寸效应在较小的系统尺寸下更为显著, 随着系统尺寸的增大, 该影响会逐渐减弱。此外, 虽然流动距离会受到初始长度的影响, 但是在给定的 L_i/d 时, 其与初始纵横比之间仍然表现出了分段式的标度关系^[23-24], 且标度关系发生变化的临界纵横比仍然位于 $a = 3$ 附近。为此, 对于给定尺寸的颗粒沉积形态与初始纵横比 a 之间满足的关系依然可表示为

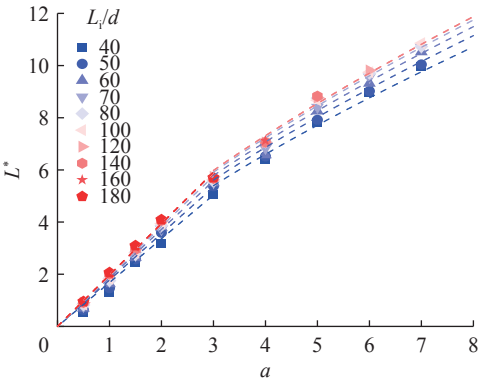
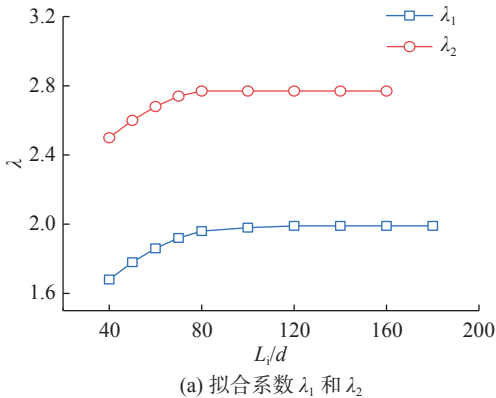
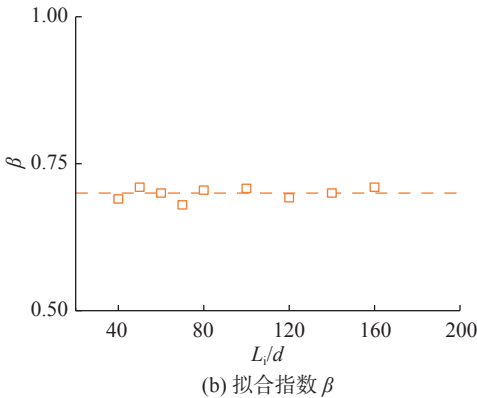


图6 不同初始长度的颗粒柱坍塌后归一化流动距离随柱体纵横比a的变化

Fig. 6 Variation of the normalized flow distance with the aspect ratio of the column with different initial lengths



(a) 拟合系数 λ_1 和 λ_2



(b) 拟合指数 β

图7 标度律中拟合系数和指数对系统初始长度的依赖关系

Fig.7 Dependence of the fitting parameters and indices in the scalar law on the initial length of the system

由以上分析可知，归一化的流动距离 L^* 会明显受到柱体初始长度 L_i/d 的影响。若 L_i/d 比较小， L^* 会随着 L_i/d 的增大而快速增大，但是当 L_i/d 足够大时，这种影响会逐渐弱化， L^* 则会趋于稳定。为了定量描述系统初始长度对颗粒柱坍塌流动带来的影响，引入归一化流动距离的相对变化量作为判别依据。

$$(L^*_{k+1} - L^*_k) / L^*_k < E_r \tag{2}$$

式中： L^*_{k+1} 和 L^*_k 分别代表前后相邻两个 L_i/d 对应的实验结果； E_r 为设定的误差限。

本文使用 $E_r = 5\%$ 作为尺寸效应消除的判定依据，以此得到不同纵横比下，柱体初始长度的临界值，如图5中的箭头所示。当 L_i/d 大于此临界值时，其对归一化流动距离的影响已经比较微弱，近似可以忽略。

依据实验数据，归一化流动距离 L^* 与柱体初始长度 L_i/d 之间满足的关系为

$$L^* = \begin{cases} \lambda_1 a, & a < 3 \\ \lambda_2 a^\beta, & a \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

其中拟合结果如图6中虚线所示。与已有结果不同的是，上述标度关系中拟合系数 λ_1 和 λ_2 不再只是依赖于颗粒材料的常数，而是与系统的初始长度 L_i/d 有关。本文依据实验结果给出了 λ_1 和 λ_2 对系统初始长度的依赖关系，如图7(a)所示。可以看出：当 L_i/d 比较小时， λ_1 和 λ_2 会随着 L_i/d 的增大而迅速增大；当 L_i/d 足够大时，两个系数均会趋于稳定。对于标度律中的指数，实验结果证实 $\beta = 0.7 \pm 0.02$ ，如图7(b)所示，其值的大小几乎不会受到系统初始长度 L_i/d 的影响。

$$L^* = L^*_\infty \left(1 - e^{-(L_i/d)/A} \right) \tag{3}$$

式中： L^*_∞ 表示尺寸效应消除后的最大流动距离，其值仅与柱体的纵横比 a 有关； A 为拟合参数，当 $a > 3$ 时， $A = 22$ ，当 $a < 3$ 时， $A = 18$ 。

用式(3)对不同 a 下的实验结果进行了拟合，如图5中不同颜色的虚线所示。可以看出，该标度关系可以很好地用来描述尺寸变化对流动距离产生的影响。

3 结 论

基于自主搭建的准二维颗粒坍塌实验平台和相应的粒子高速测速装置，研究了无黏性颗粒柱的坍塌流动过程，分析了柱体的初始尺寸对其坍塌后的动力学行为及最终堆积形态的影响。研究结果表明，对于不同初始长度的柱体，其归一化的流动前端位置随时间变化表现出了相似的演化特征，流动总的持续时间以及不同特征的流动阶

段与已有相似条件下干颗粒坍塌流动的结果基本吻合。但是初始长度会对坍塌后颗粒的最终堆积形态产生明显的影响, 尤其是对最终流动距离的影响更为显著。在 L_i/d 比较小时, 流动距离会随着 L_i/d 快速增大, 但是当 L_i/d 足够大时, 这种影响会逐渐消失, 而归一化的流动距离则会趋于稳定, 此时颗粒的沉积形态主要由纵横比 a 决定。

与此同时, 从实验结果可以发现, 尺寸效应消失的系统临界尺寸依赖于柱体的初始纵横比 a 。随着 a 的增大, 临界尺寸会轻微地减小, 这与已有的模拟结果^[9]趋势相同。最后, 考虑尺寸效应的影响, 分别建立了无黏性颗粒柱坍塌后流动距离与颗粒柱纵横比 a 以及初始尺寸 L_i/d 之间满足的标度关系, 并证实该标度律可以很好地用来描述尺寸变化对不同纵横比颗粒柱体坍塌后流动距离带来的影响。本文得到的结论有助于将实验室中小尺度的颗粒坍塌研究结果推广至尺度更大的工程问题中, 为工程实际中的大尺度重力驱动质量流的预测和防止提供理论依据。

参考文献:

- [1] 厚美琪, 陆坤权. 奇异的颗粒物质 [J]. 新材料产业, 2001(2): 26–28.
- [2] IVERSON R M, VALLANCE J W. New views of granular mass flows[J]. *Geology*, 2001, 29(2): 115–118.
- [3] PITMAN E B, NICHITA C C, PATRA A, et al. Computing granular avalanches and landslides[J]. *Physics of Fluids*, 2003, 15(12): 3638–3646.
- [4] HU Y X, LI H B, LU G D, et al. Influence of size gradation on particle separation and the motion behaviors of debris avalanches[J]. *Landslides*, 2021, 18(5): 1845–1858.
- [5] DENLINGER R P, IVERSON R M. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 1. Theory and computation[J]. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2004, 109(F1): F01014.
- [6] LUBE G, HUPPERT H E, SPARKS R S J, et al. Collapses of two-dimensional granular columns[J]. *Physical Review E*, 2005, 72(4): 041301.
- [7] LAJEUNESSE E, MONNIER J B, HOMSY G M. Granular slumping on a horizontal surface[J]. *Physics of Fluids*, 2005, 17(10): 103302.
- [8] WARNETT J M, DENISSENKO P, THOMAS P J, et al. Scalings of axisymmetric granular column collapse[J]. *Granular Matter*, 2014, 16(1): 115–124.
- [9] CABRERA M, ESTRADA N. Granular column collapse: analysis of grain-size effects[J]. *Physical Review E*, 2019, 99(1): 012905.
- [10] MAN T, HUPPERT H E, LI L, et al. Deposition morphology of granular column collapses[J]. *Granular Matter*, 2021, 23(3): 59.

- [11] MAN T, HUPPERT H E, LI L, et al. Finite-size analysis of the collapse of dry granular columns[J]. *Geophysical Research Letters*, 2021, 48(24): e2021GL096054.
- [12] YANG G C, JING L, KWOK C Y, et al. Size effects in underwater granular collapses: experiments and coupled lattice Boltzmann and discrete element method simulations[J]. *Physical Review Fluids*, 2021, 6(11): 114302.
- [13] LUBE G, HUPPERT H E, SPARKS R S J, et al. Static and flowing regions in granular collapses down channels[J]. *Physics of Fluids*, 2007, 19(4): 043301.
- [14] BALMFORTH N J, KERSWELL R R. Granular collapse in two dimensions[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 538: 399–428.
- [15] XU X R, SUN Q C, JIN F, et al. Measurements of velocity and pressure of a collapsing granular pile[J]. *Powder Technology*, 2016, 303: 147–155.
- [16] SARLIN W, MORIZE C, SAURET A, et al. Collapse dynamics of dry granular columns: from free-fall to quasistatic flow[J]. *Physical Review E*, 2021, 104(6): 064904.
- [17] DOYLE E E, HUPPERT H E, LUBE G, et al. Static and flowing regions in granular collapses down channels: insights from a sedimenting shallow water model[J]. *Physics of Fluids*, 2007, 19(10): 106601.
- [18] TAPIA-MCCLUNG H, ZENIT R. Computer simulations of the collapse of columns formed by elongated grains[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(6): 061304.
- [19] CHOU H T, LEE C F. Falling process of a rectangular granular step[J]. *Granular Matter*, 2011, 13(1): 39–51.
- [20] POLANÍA O, CABRERA M, RENOUEF M, et al. Collapse of dry and immersed polydisperse granular columns: a unified runout description[J]. *Physical Review Fluids*, 2022, 7(8): 084304.
- [21] 满腾, 葛转, HUPPERT H E, 等. 颗粒柱塌落中的尺寸效应和瞬态流变性研究 [J]. *计算力学学报*, 2022, 39(3): 381–388.
- [22] LAI Z Q, JIANG E H, ZHAO L J, et al. Granular column collapse: analysis of inter-particle friction effects[J]. *Powder Technology*, 2023, 415: 118171.
- [23] GIROLAMI L, HERGAULT V, VINAY G, et al. A three-dimensional discrete-grain model for the simulation of dam-break rectangular collapses: comparison between numerical results and experiments[J]. *Granular Matter*, 2012, 14(3): 381–392.
- [24] CROSTA G B, IMPOSIMATO S, RODDEMAN D. Numerical modeling of 2-D granular step collapse on erodible and nonerodible surface[J]. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 2009, 114(F3): F03020.