

广义 Rosenau-Kawahara 方程的有效谱方法

文 贤, 王中庆

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 针对广义 Rosenau-Kawahara 方程提出了 Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱方法, 并基于对角化技巧, 构建了快速有效算法。在此基础上研究了单个孤立波的传播、守恒律及波的生成等物理现象。数值结果验证了所提算法的有效性。

关键词: Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱方法; 广义 Rosenau-Kawahara 方程; 孤立波; 守恒律
中图分类号: O 241.82 **文献标志码:** A

An efficient spectral method for the generalized Rosenau-Kawahara equation

WEN Xian, WANG Zhongqing

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Legendre dual-Petrov-Galerkin spectral method was proposed to the generalized Rosenau-Kawahara equation. A fast and efficient algorithm was constructed based on the diagonalization technique. The motion of single solitary wave solution, conservation laws and the phenomena of wave generation were also studied. Numerical results illustrate the effectiveness of the suggested approach.

Keywords: Legendre dual-Petrov-Galerkin spectral method; generalized Rosenau-Kawahara equation; solitary wave; conservation laws

1 问题提出及预备知识

非线性波的传播是自然界中普遍存在的物理现象, 对其进行数值研究具有十分重要的理论意义和应用价值。在过去的几十年里, Korteweg-de Vries (KdV) 方程主要用来描述波动行为。为了克服传统 KdV 方程无法处理波与波及波与墙相互作用的缺点, 在离散动力学系统的研究中经常使用 Rosenau 方程。作为非线性波的进一步考虑, 在

Rosenau 方程中添加两个黏性项 u_{xxx} 和 $-u_{xxxxx}$, 即可得到 Rosenau-Kawahara 方程^[1]。不失一般性, 本文将主要考虑如下广义 Rosenau-Kawahara 方程的初边值问题^[2]:

$$\begin{cases} u_t + \beta u_x + \mu u_{xxx} + \gamma u^p u_x + \lambda u_{xxxxx} - \eta u_{xxxx} = 0, \\ x \in (-L, L), \quad t \in (0, T] \\ u(\pm L, t) = u_x(\pm L, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_{ex}(x, 0), \quad x \in [-L, L] \end{cases} \quad (1)$$

式中: p 为正整数; β, γ, μ, η 为常数; λ 为非负常数。

收稿日期: 2022-08-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12071294); 上海市自然科学基金资助项目 (22ZR1443800)

第一作者: 文 贤 (1996-), 男, 硕士研究生。研究方向: 偏微分方程数值解法。E-mail: math31wx@163.com

通信作者: 王中庆 (1968-), 男, 教授。研究方向: 偏微分方程数值解法。E-mail: zqwang@usst.edu.cn

作为广义 Rosenau-Kawahara 方程的特殊情况, Kawahara 方程、Rosenau-Kawahara 方程等在流体力学、电磁学、等离子体、非线性光学等领域都有广泛的应用^[1-5]。

文献 [1-2] 运用 sine-cosine 和 tanh 等方法构造了广义 Rosenau-Kawahara 方程的渐进解。目前仅有为数不多的文献讨论了广义 Rosenau-Kawahara 方程的数值方法。如文献 [3] 对 Rosenau-Kawahara 方程考虑了两种守恒有限差分格式, 文献 [4] 提出了 Rosenau-Kawahara 方程的一种紧致保结构有限差分格式, 文献 [2] 则发展了广义 Rosenau-Kawahara 方程的一个守恒有限差分格式。

作为微分方程的主要数值解法之一, 谱方法以其高精度优势渐受关注, 并被广泛应用于流体力学、海洋科学和大气科学等问题的数值模拟中^[5-8]。目前尚未发现使用谱方法求解广义 Rosenau-Kawahara 方程的相关文献。若使用传统谱方法进行求解, 则离散后最终得到的系数矩阵是一个十一对角矩阵, 因而极大地影响了计算效率。近年来, 文献 [9-12] 提出了椭圆型问题和 Camassa-Holm 方程等问题的对角化谱方法, 其主要优点是离散后的线性系统为对角矩阵, 进而从本质上提高了计算效率。本文针对广义 Rosenau-Kawahara 方程构造了一组 Sobolev 双正交基函数, 由此提出一个有效的 Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱方法, 并对单个孤立波的传播、守恒律及波的生成等物理现象进行了数值模拟。

下面回顾 Legendre 多项式的基本知识。记 $L_n(\xi)$ 为 n 阶 Legendre 多项式, 满足以下三递推关系^[8]:

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1, \quad L_1(\xi) = \xi, \\ (n+1)L_{n+1}(\xi) &= (2n+1)\xi L_n(\xi) - nL_{n-1}(\xi), \\ n \geq 1, \quad \xi &\in (-1, 1) \end{aligned} \quad (2)$$

其正交性为

$$\int_{-1}^1 L_n(\xi) L_m(\xi) d\xi = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad \forall m, n \geq 0 \quad (3)$$

式中, δ_{mn} 为 Kronecker 符号。

进一步地,

$$\begin{aligned} L'_n(\xi) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ odd}}}^{n-1} (2k+1) L_k(\xi), \\ (2n+1)L_n(\xi) &= L'_{n+1}(\xi) - L'_{n-1}(\xi), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

令 P_N 为不超过 N 次代数多项式的集合。正如文献 [5] 所指出的, 针对五阶微分方程, 由于算子的非对称性, 应使用 dual-Petrov-Galerkin 谱方法, 即

分别考虑如下的测试函数空间和检验函数空间:

$$\begin{aligned} V_N &= \{u \in P_N : u(\pm 1) = u_x(\pm 1) = u_{xx}(1) = 0\} \\ V_N^* &= \{u \in P_N : u(\pm 1) = u_x(\pm 1) = u_{xx}(-1) = 0\} \end{aligned}$$

相应地, 两组基函数选择如下^[5]:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_n &= L_n - \frac{2n+5}{2n+7} L_{n+1} - \frac{2(2n+5)}{2n+7} L_{n+2} + \\ &\quad \frac{2(2n+3)}{2n+9} L_{n+3} + \frac{2n+3}{2n+7} L_{n+4} - \\ &\quad \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+7)(2n+9)} L_{n+5} \\ \psi_n &= L_n + \frac{2n+5}{2n+7} L_{n+1} - \frac{2(2n+5)}{2n+7} L_{n+2} - \\ &\quad \frac{2(2n+3)}{2n+9} L_{n+3} + \frac{2n+3}{2n+7} L_{n+4} + \\ &\quad \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+7)(2n+9)} L_{n+5} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

显然

$$\begin{aligned} V_N &= \text{span} \{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{N-5}(x)\} \\ V_N^* &= \text{span} \{\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{N-5}(x)\} \end{aligned}$$

记 $(2k+m)_{n+1} := (2k+m)(2k+2+m) \cdots (2k+2n+m)$, $a_{l,k} = (\phi_k, \psi_l)$, $b_{l,k} = (\phi_k, \partial_x \psi_l)$, $c_{l,k} = (\partial_x \phi_k, \partial_x^2 \psi_l)$, $d_{l,k} = (\partial_x^2 \phi_k, \partial_x^3 \psi_l)$ 。由 Legendre 多项式的性质式 (2)~(4) 和两组基函数的定义可得, 矩阵 $A = (a_{lk})_{k \geq 0, l \leq N-5}$, $B = (b_{lk})_{k \geq 0, l \leq N-5}$, $C = (c_{lk})_{k \geq 0, l \leq N-5}$, $D = (d_{lk})_{k \geq 0, l \leq N-5}$, $E = (e_{lk})_{k \geq 0, l \leq N-5}$ 的非零元为

$$\begin{aligned} a_{k,k} &= \frac{120(2k+3)_2}{(2k+1)(2k+7)_3}, \quad a_{k,k-1} = -a_{k-1,k} = \frac{20(2k+3)}{(2k+7)_2}, \\ a_{k,k-2} &= a_{k-2,k} = \frac{-80}{(2k+7)_2}, \\ a_{k,k-3} &= -a_{k-3,k} = \frac{-10(2k-3)}{(2k+1)(2k+7)}, \\ a_{k,k-4} &= a_{k-4,k} = \frac{20(2k-5)}{(2k-1)_2(2k+7)}, \\ a_{k,k-5} &= -a_{k-5,k} = \frac{2(2k-7)_2}{(2k-3)_3}, \\ b_{k,k} &= \frac{12(2k+3)_2}{(2k+7)_2}, \\ b_{k,k-1} &= -b_{k-1,k} = \frac{-48(2k+3)}{(2k+7)_2}, \\ b_{k,k-2} &= b_{k-2,k} = \frac{-8(2k-1)}{2k+7}, \\ b_{k,k-3} &= -b_{k-3,k} = \frac{16(2k-3)}{(2k+1)(2k+7)}, \\ b_{k,k-4} &= b_{k-4,k} = \frac{2(2k-5)_2}{(2k-1)_2}, \\ c_{k,k} &= \frac{4(2k+3)(2k+3)_2}{2k+7}, \\ c_{k,k-1} &= -c_{k-1,k} = \frac{-8(2k+1)_2}{2k+7}, \end{aligned}$$

$$c_{k,k-2} = c_{k-2,k} = -2(2k-1)_2,$$

$$d_{k,k} = \frac{4(2k+3)(2k+3)_2}{2k+7},$$

$$d_{k,k-1} = -d_{k-1,k} = 2(2k+1)_2(2k+3),$$

$$e_{k,k} = 2(2k+3)_2(2k+3)_2$$

2 Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱方法

2.1 谱格式

为了使用 Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱方法求解原方程 (1), 进行 $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{t} = t/L$ 线性变换, 仍用 (x, t) 表示 $(\tilde{x}, \tilde{t})$ 。考虑如下压缩的广义 Rosenau-Kawahara 方程:

$$\begin{cases} u_t + \beta u_x + \frac{\mu}{L^2} u_{xxx} + \gamma u^p u_x + \frac{\lambda}{L^4} u_{xxxx} - \frac{\eta}{L^4} u_{xxxx} = 0, \\ x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T] \\ u(\pm 1, t) = u_x(\pm 1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_{ex}(Lx, 0), \quad x \in [-1, 1] \end{cases}$$

记时间步长为 τ , $M = T/\tau$, $u^{(k)} = u(x, k\tau)$, $k = 0, 1, \dots, M$ 。上述方程的标准中心差分格式为

$$\begin{cases} \frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\tau} + \beta \frac{u_x^{(k+1)} + u_x^{(k)}}{2} + \gamma \frac{(u^{(k+1)})^p u_x^{(k+1)} + (u^{(k)})^p u_x^{(k)}}{2} + \\ \frac{\mu}{L^2} \frac{u_{xxx}^{(k+1)} + u_{xxx}^{(k)}}{2} + \frac{\lambda}{L^4} \frac{u_{xxxx}^{(k+1)} - u_{xxxx}^{(k)}}{\tau} - \frac{\eta}{L^4} \frac{u_{xxxx}^{(k+1)} + u_{xxxx}^{(k)}}{2} = 0, \\ 0 \leq k \leq M-1 \\ u^{(0)}(x) = u_{ex}(Lx), \quad x \in (-1, 1) \\ u^{(k)}(\pm 1) = u_x^{(k)}(\pm 1) = u_{xx}^{(k)}(1) = 0 \end{cases}$$

相应的全离散 Legendre dual-Petrov-Galerkin 谱格式如下:

求 $u_N^{(k+1)} \in V_N$, 使得

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta, \mu, \lambda, \eta}(u_N^{(k+1)}, v) &= \mathcal{F}(u_N^{(k)}, v), \\ \forall v \in V_N^*, \quad 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\mathcal{A}_{\beta, \mu, \lambda, \eta}(u, v) := 2(u, v) - \tau\beta(u, v_x) + \frac{\tau\mu}{L^2}(u_x, v_{xx}) +$$

$$\frac{2\lambda}{L^4}(u_{xx}, v_{xx}) + \frac{\tau\eta}{L^4}(u_{xx}, v_{xxx}),$$

$$\mathcal{F}(u_N^{(k)}, v) := 2(u_N^{(k)}, v) + \tau\beta(u_N^{(k)}, v_x) - \frac{\tau\mu}{L^2}(u_{N,x}^{(k)}, v_{xx}) +$$

$$\frac{2\lambda}{L^4}(u_{N,xx}^{(k)}, v_{xx}) - \frac{\tau\eta}{L^4}(u_{N,xx}^{(k)}, v_{xxx}) + \frac{\tau\gamma}{p+1}((u_N^{(k+1)})^{p+1} + (u_N^{(k)})^{p+1}, v_x)$$

2.2 对角化方法

为了更加高效地求解广义 Rosenau-Kawahara

方程, 应使用对角化技巧, 即重新选择两组基函数, 使得方程组 (6) 中的系数矩阵为对角矩阵, 从而提高在每个时间层求解方程组 (6) 的效率。为此, 先介绍两组修正的基函数 $\Phi_n(x) := \Phi_{n, \alpha, \beta, \mu, \lambda, \eta}(x)$ 和 $\Psi_n(x) := \Psi_{n, \alpha, \beta, \mu, \lambda, \eta}(x)$, 它们关于如下双线性算子 Sobolev 双正交, 即 $\mathcal{B}_{\alpha, \beta, \mu, \lambda, \eta}(u, v) := \alpha(u, v) - \beta(u, v_x) + \mu(u_x, v_{xx}) + \lambda(u_{xx}, v_{xx}) + \eta(u_{xx}, v_{xxx})$ 。显然, 该算子是式 (6) 中双线性算子的一般化。

引理 1 设 $\Phi_0(x) = \phi_0(x)$, $\Psi_0(x) = \psi_0(x)$, 且 $\Phi_n(x) \in V_{n+5}$, $\Psi_n \in V_{n+5}^*$ 是两组 Sobolev 双正交多项式, 满足 $\Phi_n - \phi_n \in V_{n+4}$, $\Psi_n - \psi_n \in V_{n+4}^*$, 且

$$\mathcal{B}_{\alpha, \beta, \mu, \lambda, \eta}(\Phi_n, \Psi_m) = \rho_n \delta_{n,m}, \quad \forall n, m \geq 0$$

则下述递推式成立, 即

$$\begin{cases} \Phi_n = \phi_n - a_n \Phi_{n-1} - b_n \Phi_{n-2} - c_n \Phi_{n-3} - \\ d_n \Phi_{n-4} - e_n \Phi_{n-5}, \quad \forall n \geq 1 \\ \Psi_n = \psi_n + a_n \Psi_{n-1} - b_n \Psi_{n-2} + c_n \Psi_{n-3} - \\ d_n \Psi_{n-4} + e_n \Psi_{n-5}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

当 $n < 0$ 时, $\Phi_n(x) \equiv \Psi_n(x) \equiv 0$, $\rho_n = 0$; 当 $n < 1$ 时, $a_n = 0$; 当 $n < 2$ 时, $b_n = 0$; 当 $n < 3$ 时, $c_n = 0$; 当 $n < 4$ 时, $d_n = 0$; 当 $n < 5$ 时, $e_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} \rho_n &= a_{n,n} \alpha + b_{n,n} \beta + c_{n,n} \mu + d_{n,n} \lambda + e_{n,n} \eta + a_{n,n}^2 \rho_{n-1} - \\ &\quad b_{n,n}^2 \rho_{n-2} + c_{n,n}^2 \rho_{n-3} - d_{n,n}^2 \rho_{n-4} + e_{n,n}^2 \rho_{n-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\rho_{n-1}}(a_{n,n-1} \alpha + b_{n,n-1} \beta + c_{n,n-1} \mu + d_{n,n-1} \lambda + \\ &\quad e_{n,n-1} \eta + b_n a_{n-1} \rho_{n-2} - c_n b_{n-1} \rho_{n-3} + d_n c_{n-1} \rho_{n-4} - \\ &\quad e_n d_{n-1} \rho_{n-5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\rho_{n-2}}(a_{n,n-2} \alpha + b_{n,n-2} \beta + c_{n,n-2} \mu + c_n a_{n-2} \rho_{n-3} - \\ &\quad d_n b_{n-2} \rho_{n-4} + e_n c_{n-2} \rho_{n-5}) \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{\rho_{n-3}}(a_{n,n-3} \alpha + b_{n,n-3} \beta + d_n a_{n-3} \rho_{n-4} - e_n b_{n-3} \rho_{n-5})$$

$$d_n = \frac{1}{\rho_{n-4}}(a_{n,n-4} \alpha + b_{n,n-4} \beta + e_n a_{n-4} \rho_{n-5})$$

$$e_n = \frac{a_{n,n-5}}{\rho_{n-5}} \alpha$$

限于文章篇幅, 具体证明过程可参照文献 [9-12] 类似可得。特别地, 取两组修正的 Sobolev 双正交基函数 $\tilde{\Phi}_n(x)$ 和 $\tilde{\Psi}_m(x)$, 满足

$$\mathcal{B}_{2, \tau\beta, \tau\mu/L^2, \lambda/L^4, \tau\eta/L^4}(\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Psi}_m) =$$

$$\mathcal{A}_{\beta, \mu, \lambda, \eta}(\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Psi}_m) = \tilde{\rho}_n \delta_{n,m}, \quad \forall n, m \geq 0$$

则问题的数值解 $u_N^{(k+1)}$ 可表示为

$$u_N^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{N-5} \tilde{u}_n \tilde{\Phi}_n(x), \quad \tilde{u}_n = \frac{\mathcal{F}(u_N^{(k)}, \tilde{\Psi}_n)}{\tilde{\rho}_n} \quad (8)$$

式 (6) 在时间方向上是一个隐格式, 实际计算包含非线性项的右端项时需要使用迭代方法求

解。显然, 式 (6) 的系数矩阵是对角矩阵, 而若使用经典的基函数式 (5), 则系数矩阵为十一对角矩阵。因此, 本文的对角化方法极大地提升了计算效率。对于区间 (a, b) 上的问题, 只需作线性变换 $\xi = \frac{2x-a-b}{b-a}$, 则 $\xi \in (-1, 1)$ 。

3 数值结果

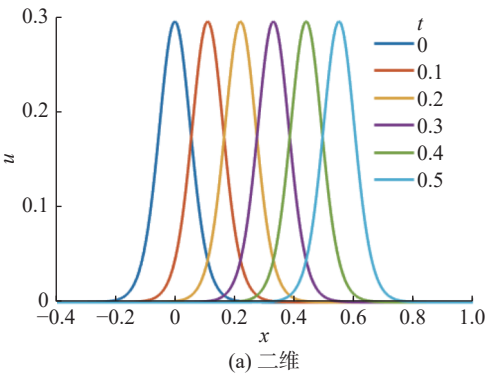
针对广义 Rosenau-Kawahara 方程给出一系列数值结果, 用以描述广义 Rosenau-Kawahara 方程单个孤立波的传播、守恒律及波的生成等物理现象。除特殊说明外, 以下均取 $L = 100, N = 256, \tau = 10^{-4}$ 。

3.1 孤立波解

众所周知, 孤立波在许多自然科学领域有重要价值。首先考虑 Rosenau-Kawahara 方程的孤立波解^[1]:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_{ex}(x, 0) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $u_{ex}(x, t) = A \operatorname{sech}^4(B(x-vt))$ 。 $A = \frac{35(\sqrt{205}-13)}{156}$,



$B = \frac{\sqrt{\sqrt{205}-13}}{12}$ 和 $v = \frac{\sqrt{205}}{13}$ 分别表示孤立波的振幅、波数和波速。方程的该解表示一个初始以 $x = 0$ 为中心、波速为 v 的自左向右传播的单个孤立波。

采用前述谱格式进行数值求解。图 1 表明孤立波在不同时刻以恒定的速度和振幅自左向右传播, 并展示了相应的三维传播图。可以观察到数值解的振幅和波速几乎是常数, 且与精确值完全一致。图 2 分别给出了数值解的 L^2 和 L^∞ 误差, 可以看到, 在 $t = 0.5$ (对应实际时间 $t = 50$, 下同) 时的误差量级在 10^{-7} , 该结果表明本文算法提供了比已有文献更好的数值结果。

下面考虑广义 Rosenau-Kawahara 方程的孤立波解:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + 8u^7u_x + u_{xxxxt} - u_{xxxxx} = 0 \\ u(x, 0) = u_{ex}(x, 0) \end{cases} \quad (10)$$

式中, $u_{ex}(x, t) = A \operatorname{sech}^{4/7}(B(x-vt))$ 。

$A = \left(\frac{55(-85 + \sqrt{7549})}{1\,224}\right)^{1/7}$, $B = \frac{7\sqrt{\sqrt{7549}-85}}{36}$ 和 $v = \frac{\sqrt{7549}}{85}$ 分别表示孤立波的振幅、波数和波速。

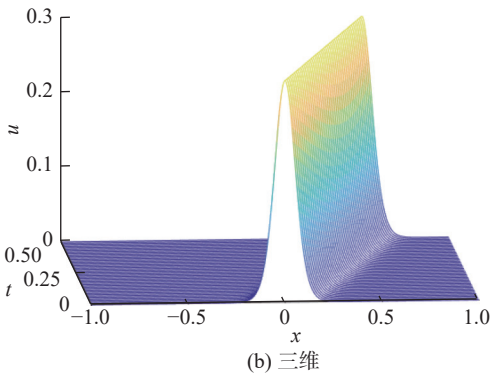


图 1 Rosenau-Kawahara 方程(9)的孤立波解传播

Fig.1 Motion of solitary wave solution for the Rosenau-Kawahara equation (9)

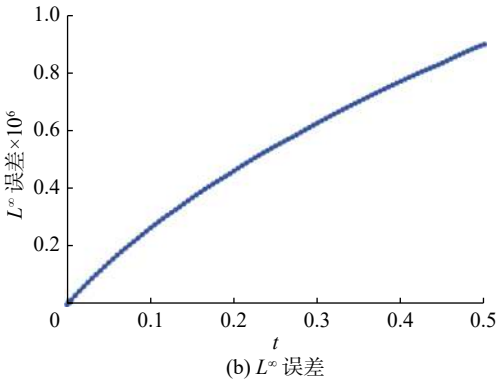
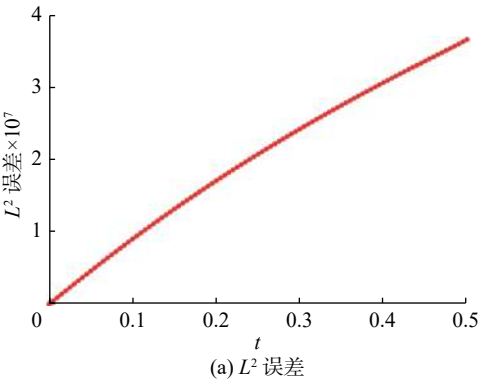


图 2 孤立波解的数值误差

Fig.2 Errors of solitary wave solution

采用前述谱格式进行数值求解。图 3 表明孤立波在不同时刻以恒定的速度和振幅自左向右传播，并展示了相应的三维传播图形。可以观察到数值解的振幅和波速几乎是常数，且与精确解完全一致。

3.2 守恒律

对广义 Rosenau-Kawahara 方程，文献 [2-4] 给出了 3 个基本的守恒量，即质量、动量和能量：

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx, \quad P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)dx,$$
$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u^2(x,t) + \lambda u_{xx}^2(x,t) \right\} dx$$

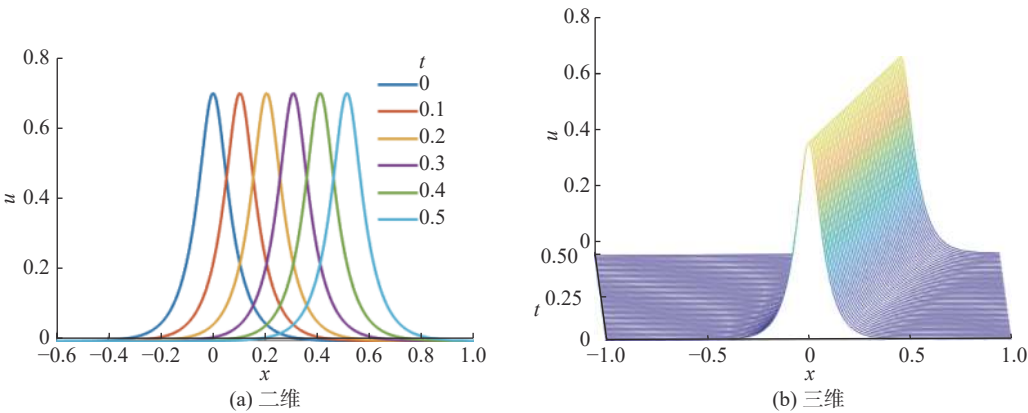


图 3 广义 Rosenau-Kawahara 方程 (10) 的孤立波解传播

Fig.3 Motion of solitary wave solution for the generalized Rosenau-Kawahara equation (10)

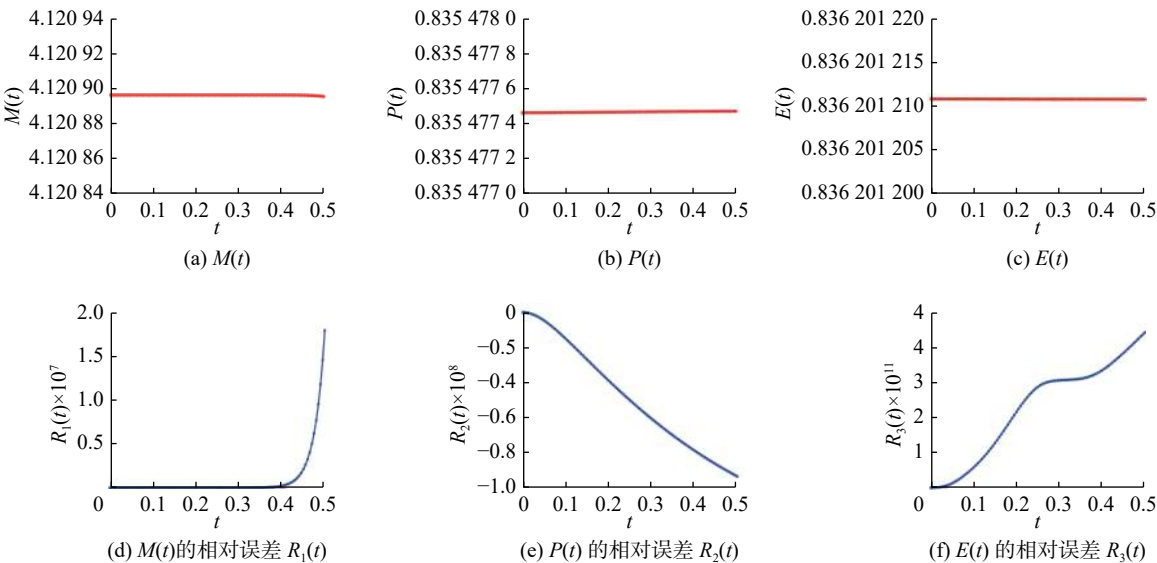


图 4 守恒量及其相对误差

Fig.4 Conserved quantities and the relative errors

$$M(t) \approx M(0) \approx 4.120\,895\,969, \quad P(t) \approx P(0) \approx 0.835\,477\,463,$$
$$E(t) \approx E(0) \approx 0.836\,201\,211$$

3.3 波的生成

考虑 Rosenau-Kawahara 方程和初值 $u_0(x) =$

下面考虑对应的离散守恒量及其相对误差。作为例子，本文仅考虑 Rosenau-Kawahara 方程，其初值

$$u_{ex}(x,0) = \frac{35(\sqrt{205}-13)}{156} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{\sqrt{205}-13}}{12} x \right)$$

在图 4 中，分别画出 3 个守恒量及其相对误差随时间的变化情况。从图中可以看到，Rosenau-Kawahara 方程的 3 个守恒量保持得非常好，且满足：

$\kappa \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\sqrt{205}-13}/12 x \right)$ ，对于给定的 κ ，该初值可以用来模拟单个孤立波生成多个波的过程，取区间 $I = (-2,2)$ 。

首先, 令 $\kappa=6$ 。图 5 描绘了波的生成过程。由图 5 可以发现, 最终有 4 个孤立波生成, 各个孤立波之间的距离随着时间推移而逐渐增加, 且各自以不同的波速和振幅自左向右传播, 振幅和波速大的孤立波会逐步远离那些振幅和波速小的

波。另外, 也可以清晰地看到, 第 2, 3, 4 个孤立波是在传播过程中生成的, 其生成时刻分别约为 $t=0.03, 0.05, 0.20$ 。特别地, 通过数值实验可以发现, 对于给定的正整数 $\kappa=M(M+1)$, 上述初值会生成 $M+2$ 个波。

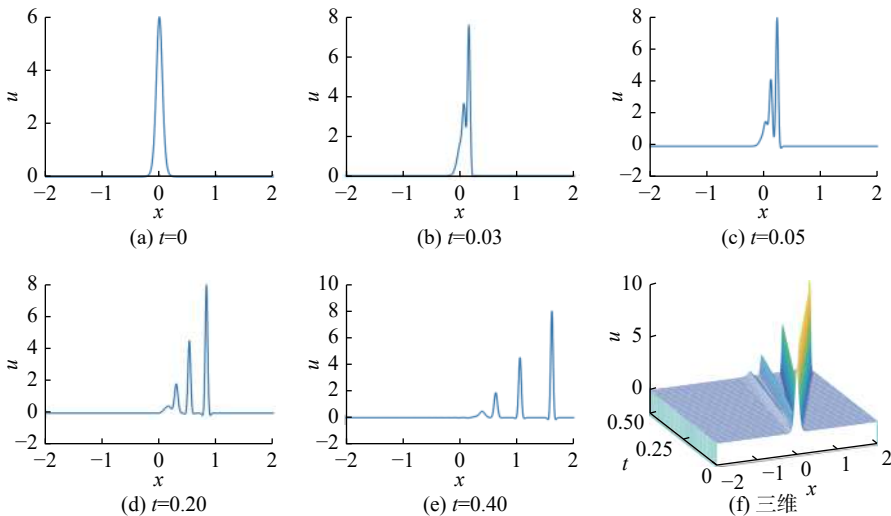


图 5 波的生成 ($\kappa=6$)
Fig.5 Wave generation($\kappa=6$)

下面考虑负数 $\kappa=-2$ 。图 6 描绘了不同时刻波的形状。数值结果显示最终没有孤立波生成, 相

反地, 形成了一系列沿负方向传播、振幅不断衰减的振荡色散波。

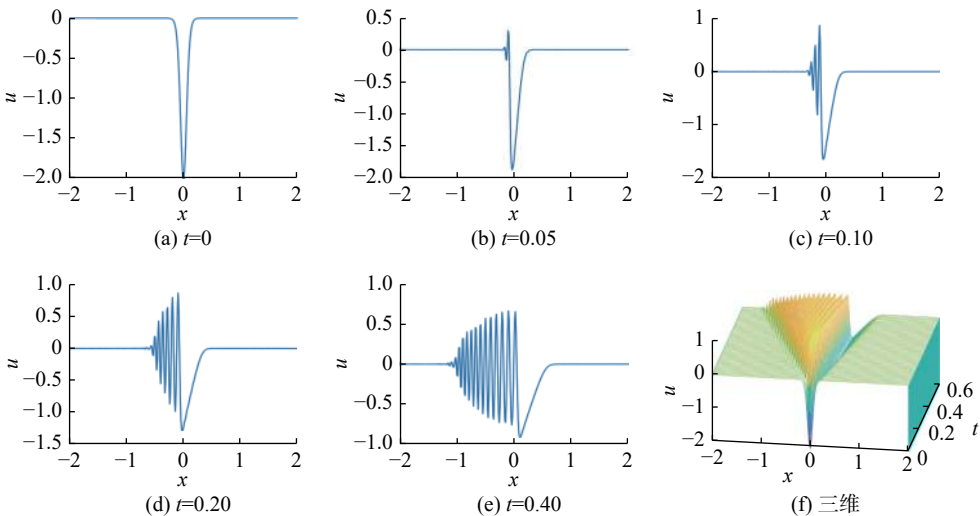


图 6 波的生成 ($\kappa=-2$)
Fig.6 Wave generation($\kappa=-2$)

参考文献:

[1] ZUO J M. Solitons and periodic solutions for the Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215(2): 835–840.

[2] HE D D. New solitary solutions and a conservative numerical method for the Rosenau-Kawahara equation with power law nonlinearity[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(3): 1177–1190.

[3] HU J S, XU Y C, HU B, et al. Two conservative difference schemes for Rosenau-Kawahara equation[J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2014, 2014: 217393.

[下转第 86 页]

[5] 刘韬, 徐爱功, 隋心. 基于自适应抗差卡尔曼滤波的 UWB 室内定位 [J]. *传感技术学报*, 2018, 31(4): 567–572.

[6] 孙大洋, 章荣炜, 李赞. 室内定位技术综述 [J]. *无人系统技术*, 2020, 3(3): 32–46.

[7] HSIEH C H, CHEN J Y, NIEN B H. Deep learning-based indoor localization using received signal strength and channel state information[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 33256–33267.

[8] MEGHANI S K, ASIF M, AWIN F, et al. Empirical based ranging error mitigation in IR-UWB: a fuzzy approach[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 33686–33697.

[9] XUE Y, SU W, WANG H C, et al. DeePTAL: deep learning for TDOA-based asynchronous localization security with measurement error and missing data[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 122492–122502.

[10] JOUNG J, JUNG S, CHUNG S, et al. CNN-based Tx–Rx distance estimation for UWB system localisation[J]. *Electronics Letters*, 2019, 55(17): 938–940.

[11] 王斐, 徐湛, 职如昕, 等. 基于卷积神经网络的 OFDM-UWB 信道环境识别 [J]. *计算机工程*, 2021, 47(7): 161–167.

[12] NIITSOO A, EDELHÄÜBER T, MUTSCHLER C. Convolutional neural networks for position estimation in TDoA-based locating systems[C]//Proceedings of 2018 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Nantes: IEEE, 2018: 1–8.

[13] POULOSE A, KIM J, HAN D S. A sensor fusion framework for indoor localization using smartphone sensors and wi-fi rssi measurements[J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(20): 4379.

(编辑: 丁红艺)



[上接第 35 页]

[4] WONGSAIJAI B, CHAROENSAWAN P, CHAOBAN-KOH T, et al. Advance in compact structure-preserving manner to the Rosenau-Kawahara model of shallow-water wave[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, 44(8): 7048–7064.

[5] YUAN J M, SHEN J, WU J H. A dual-Petrov-Galerkin method for the Kawahara-type equations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2008, 34(1): 48–63.

[6] BOYD J P. Chebyshev and Fourier spectral methods[M]. 2nd ed. Mineola: Dover Publications, 2001.

[7] GUO B Y. Spectral methods and their applications[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[8] SHEN J, TANG T, WANG L L. Spectral methods: algorithms, analysis and applications[M]. Heidelberg: Springer, 2011.

[9] AI Q, LI H Y, WANG Z Q. Diagonalized Legendre spectral methods using Sobolev orthogonal polynomials for elliptic boundary value problems[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2018, 127: 196–210.

[10] YU X H, YE X Q, WANG Z Q. A fast solver of Legendre-Laguerre spectral element method for the Camassa-Holm equation[J]. *Numerical Algorithms*, 2021, 88(1): 1–23.

[11] LI S, YAN S M, WANG Z Q. Efficient Legendre dual-Petrov-Galerkin methods for odd-order differential equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2020, 25(4): 1543–1563.

[12] ZHANG Y, YU X H, WANG Z Q. Efficient and accurate Legendre spectral element methods for one-dimensional higher order problems[J]. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2021, 14(2): 461–487.

(编辑: 丁红艺)