文章编号:1007－6735(2025)05－0512－11　DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.20240520002

二维和三维对称扩缩通道流动的非线性特性

杨丽泉，　杨　茉，　黄维佳
（上海理工大学 能源与动力工程学院，上海 200093）

摘要：对具有对称结构的扩缩通道中的流体流动，分别建立了二维和三维流动模型。分析证明了三维模型具有与二维模型相同的二维解。通过数值模拟，分别获得了 *Re* 取不同值时二维和三维模型中流体流动的速度场。根据数值结果，分析了二维模型和三维模型流动的非线性特性及其差异。数值结果表明，*Re* 取不同值时，二维模型和三维模型中的流动都经历了解的分岔，出现了对称破缺、自维持振荡，以及混沌等非线性现象。当 *Re* 为 120 时，二维模型与三维模型都具有唯一的、对称的、稳态的速度场，二维模型与三维模型的解完全相同；当 *Re* 为 200 时，二维模型与三维模型的解不唯一，存在一对反对称的稳态非对称解，二维与三维模型的解依然完全相同，没有三维的流动；当 *Re* 为 280 时，三维模型出现了三维流动，二维模型与三维模型的解不同，但都具有一对反对称的稳态非对称解；当 *Re* 为 330 时，二维模型与三维模型都恢复到具有唯一的、对称的、稳态解，二维模型与三维模型的解完全相同；当 *Re* 为 352、380、600 时，二维模型与三维模型的解都是振荡的、非稳态的，三维模型的解不同于二维模型的解，出现了三维流动，解从周期振荡、倍周期振荡，发展为混沌。

关键词：扩缩通道；流体流动；数值模拟；分岔；非线性
中图分类号：F 830　　**文献标志码：**A

Nonlinear phenomena of two-dimensional and three-dimensional fluid flow in expansion and contraction channels with symmetric structure

YANG Liquan,　YANG Mo,　HUANG Weijia
(*School of Energy and Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: Two-dimensional and three-dimensional flow models were established for fluid flow in

收稿日期: 2024−05−20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52576092)
第一作者: 杨丽泉(1988—)，女，博士研究生．研究方向：流体流动的非线性特性．E-mail：yangliquan00001@126.com
通信作者: 杨　茉(1958—)，男，教授．研究方向：流动和传热的数值计算．E-mail：yangm@usst.edu.cn

引文格式: 杨丽泉，杨茉，黄维佳．二维和三维对称扩缩通道流动的非线性特性[J]．上海理工大学学报，2025，47(5)：512-522.
Citation: YANG Liquan, YANG Mo, HUANG Weijia. Nonlinear phenomena of two-dimensional and three-dimensional fluid flow in expansion and contraction channels with symmetric structure[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2025, 47(5): 512-522.

expansion and contraction channels with symmetric structure. The analysis proved that the three-dimensional model has the same two-dimensional solution as the two-dimensional model. By numerical simulation, the velocity fields of fluid flow in two-dimensional and three-dimensional models were obtained for different *Re*. Based on numerical results, the nonlinear characteristics and differences of flow between two-dimensional and three-dimensional models were analyzed. The numerical results indicate that when *Re* is different, the flow in both the two-dimensional and three-dimensional models undergoes bifurcation of the solution, resulting in nonlinear phenomena such as symmetry breaking, self-sustained oscillation, and chaos. When *Re* is 120, both the two-dimensional and three-dimensional models have unique, symmetric, and steady-state velocity fields, and the solutions of the two-dimensional and three-dimensional models are exactly the same. When *Re* is 200, the solutions of the two-dimensional and three-dimensional models are not unique, and there is a pair of antisymmetric steady-state asymmetric solutions. The solutions of the two-dimensional and three-dimensional models are still exactly the same, and there is no three-dimensional flow. When *Re* is 280, a three-dimensional flow occurs in the three-dimensional model. The solutions of the two-dimensional model and the three-dimensional model are different, but both have a pair of antisymmetric steady-state asymmetric solutions. When *Re* is 330, both the two-dimensional and three-dimensional models have unique, symmetric, and steady-state solutions, and their solutions are exactly the same. When *Re* is 352, 380, and 600, the solutions of both the two-dimensional and three-dimensional models are oscillatory and non-stationary. The solutions of the three-dimensional model are different from those of the two-dimensional model, resulting in three-dimensional flow. The solutions develop from periodic oscillation, period doubling oscillation, to chaos.

Keywords: *expansion and contraction channels*; *fluid flow*; *numerical simulation*; *bifurcation*; *nonlinearity*

具有对称结构的扩缩通道中的流体流动存在非线性现象，其二维模型和三维模型中流动规律和非线性特性存在差异。实际工程问题严格说都是三维的，需要用三维模型来表征。但是，有些三维模型，当某个方向上物理和相应的几何条件具有某种一致性时，三维模型所表征的物理量在这个方向上没有变化，即解是二维的。此时，在对实际问题进行理论分析时，常常直接将三维问题抽象为二维模型，使问题的分析得到了简化。然而，对一个有流体流动的非线性动力学系统，当系统中出现非线性的现象时，即使在某个方向上物理和相应的几何条件具有某种一致性，并且问题仍然存在二维解，但由于非线性的原因，同时还存在多个不同于二维解的三维解，这些三维解无法由二维模型获得。也就是说，这时如果仍用二维模型来表征实际问题，可能会导致具有重要价值的三维解的缺失，因此，用原来的二维模型已经不能完整地表征实际问题，需要采用三维模型。例如，扩缩通道中的流体流动就会出现这种情况。当流动的特征数雷诺数 *Re* 超过某些临界值时，会出现对称破缺（symmetry breaking）、自维持振荡（self-sustained oscillation）、分岔（bifurcation）、混沌（chaos）等非线性现象[1]，此时，实际问题会表现出三维的流动特性，二维模型不能够表征这些三维特性。文献 [2] 在研究二维和三维自然对流换热的非线性特性时，就报道了类似的情况。本文的意图是，在查明扩缩通道中二维和三维模型的流动特性和非线性特性的同时，比较二维模型和三维模型之间解的差异，以查明对于实际的工程问题，什么条件下仅存在二维解，用简化的二维模型就可以完整地表征实际问题；以及在什么条件下实际问题不仅存在二维解，同时还存在多个三维解，必须采用三维模型，才能完整地的对实际问题进行表征，为更深入的理论研究和正确的指导工程实践奠定基础。

本文研究的工程背景之一是人类喉咙里发声过程的气流流动[3]。借助计算流体力学工具，深入了解人的喉咙中气流流动特性，对于预防和治疗

语音障碍疾病具有重要价值[4-5]。医学临床研究已经观察到男性和女性声道的几何结构存在差别，因而发出的声音不同[6]。人类喉咙发声过程的抽象模型就是通道中的流动问题。Mccollum等[7]对9种几何结构声道模型中的气流流动进行了数值模拟，给出了不同几何结构声道模型中声带在气流作用下的振动情况，给出了几何结构变化对发声的影响。文献[8]亦通过数值模拟探讨了人类声道的发声过程。

笔者注意到，Mccollum等[7]和Šidlof等[8]所考虑的声道几何结构都具有某种对称性，但在*Re*的某些取值范围内，流场的数值结果却是非对称的。并且，所给出问题的所有边界条件都与时间无关，但*Re*超过某个临界值时，流场的数值结果是振荡的，随时间变化的。笔者认为，这是一种流动的非线性现象，数值解发生了分岔。

除了上述声道发声问题外，通道流动问题还有更为广泛的工程背景。例如各种热交换器、燃烧器、采暖通风等许多工程问题，都能抽象为通道中的流动问题。

已有较多的研究者，从各种工程背景出发，探讨了各种几何结构通道内流体流动的非线性现象及其解的分岔[9-24]。文献[9-24]研究的物理模型的几何结构都有一个共同的特征，就是具有某种对称性，但其中的流动却可能是非对称的、稳态的，即发生了静态分岔。此外，以上给出的这些文献研究的物理模型所共有的另一个特征是所有边界条件都与时间无关，但其中的流动却可能是随时间变化的、振荡的，即发生了动态分岔。

文献[9-17]对突扩通道中流动的非线性特性进行了研究。当*Re*增加到某个特定的临界值时，观察到一个稳定的非对称解，流动开始不对称。不同的几何模型、不同的扩张比都有相应的临界*Re*与之对应，Drikakis等[9]、Revuelta等[10]发现临界*Re*随扩张比的增加而减小。Sobey等[11]、Fearn等[12]的数值计算，以及Shapira等[13]的线性稳定性分析指出，对称性破缺是作为Navier–Stokes方程解的超临界音叉分岔的结果，即上述的临界*Re*下，2个稳定解共存[14]。Sobey等[11]的结果表明还有一个不稳定的解存在。Chiang等[15]研究了通过平面对称突然扩张的三维流动的稳定分岔现象，得出2个稳定的不对称解和一个不稳定的对称解共存。Guevel等[16]通过改变几何参数，研究三维突扩通道内部流体流动的情况，得出了长宽比为1~10时几个主要的分岔临界数。Moallemi等[17]直接模拟二维突扩流动情况，观察到流动的分岔现象，并确定了各突扩比的临界*Re*。

与本文的生物医学研究背景类似，Saha等[18]假设血液为牛顿流体，对人类心脏中血液流动进行了数值模拟，分析了在不同*Re*和收缩比下，平面收缩–扩张通道内的血液流动特性及非线性特性和解的分岔。

Laskos等[19]模拟了具有肋片的矩形截面通道中三维流动的非线性特性。Wang等[20]研究了具有一个圆形障碍物的突扩通道内流动与传热的非线性特性，耦合了温度分布和传热。Li等[21]研究了对称圆和半圆浅室中流动和传质的非线性特性，耦合了浓度分布和传质。Li等[22]研究了水平腔中自然对流流动的非线性特性，研究的问题仍然具有对称结构，所不同的是耦合了自然对流传热传质，流动的驱动力是在重力场中密度和浓度变化引起的浮力。

Mizushima等[23-24]研究模型的几何形状与本文相同，对二维突扩突缩通道中的流动进行了数值模拟，分析了其中的非线性特性。

以上研究多数采用二维模型，也有文献采用了三维模型，揭示了其中流动与传热的非线性特性和规律，但没有将同一问题的二维和三维模型之间的结果进行比较。

本文对扩缩通道中的流体流动分别建立了二维和三维模型。首先，分析证明了三维模型具有二维解；然后，通过数值计算，分别探讨了二维和三维模型的流动规律和非线性特性，对二维模型与三维模型的数值结果进行了比较，给出了两者的差异，为更深入的理论和实验研究奠定了基础。

1 物理和数学模型及其数值方法

1.1 物理模型

图1为扩缩通道内流体流动的物理模型。扩缩通道由两端的狭窄通道和二者之间的宽通道组成，某种流体介质在通道中流动。如图1所示，通道关于水平中心轴线（x轴）在垂直方向（y轴）以及前后方向（z轴）都是完全对称的（图1在z方向仅画出一半）。通道入口段的进口速度均匀，为U_{m}。入口段和出口段的高度相同，为h。中间段宽通道的高度为H，长度为L_0，扩口高度H_1=H_2=(H–h)/2。进口窄通道和出口窄通道的高度都为h，

长度分别为 L_1 和 L_2，取 L_1=L_2=60 h。

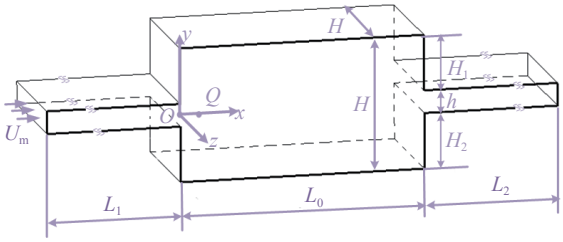


图 1　扩缩通道内流动的物理模型 (一半区域)

Fig.1　The physical model of fluid flow in a sudden expansion and contraction channel (half section)

突扩截面与对称轴的交点为 O。以 O 为坐标原点建立笛卡尔坐标系，流动方向为 x 轴正方向。距点 O 水平距离为 0.2H 的点为 Q(x，y，z)。采用点 Q 处 y 方向的无量纲瞬时速度 V (t) 作为分析非线性特性的代表量。

1.2　二维数学模型

针对图 1 在 z 方向的一个截面(z=0)，建立如下二维数学模型。

定义下列无量纲量：

$$X=\frac{x}{H},\ Y=\frac{y}{H},\ T=\frac{U_0 t}{H},\ U=\frac{u}{U_0},\ V=\frac{v}{U_0},\ P=\frac{p}{\rho U_0^2}$$

式中：x、y、t 分别为空间坐标变量和时间坐标变量；u、v 分别为水平方向 x 和竖直方向 y 的速度分量；p为压力；P 为无量纲压力；ρ 为密度；U_0 为参考速度，取进口或出口窄通道中流动达到充分发展时的最大速度(泊肃叶流最大速度)[25]，U_0=1.5 U_{m}。

特征数 Re 定义如下：

$$Re=\frac{U_0 H}{\nu}$$

式中，ν为运动黏度。

无量纲几何量定义如下：

突扩比 Er=H/h，长宽比 Ar= L_0/H。

假设流体为不可压缩流体、常物性，不考虑重力，则二维的突扩突缩通道内强制流动的无量纲控制微分方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial T}+U\dfrac{\partial U}{\partial X}+V\dfrac{\partial U}{\partial Y}=-\dfrac{\partial P}{\partial X}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)\\ \dfrac{\partial V}{\partial T}+U\dfrac{\partial V}{\partial X}+V\dfrac{\partial V}{\partial Y}=-\dfrac{\partial P}{\partial Y}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)\\ \dfrac{\partial U}{\partial X}+\dfrac{\partial V}{\partial Y}=0\end{cases}\tag{1}$$

相应的无量纲边界条件为

$$\begin{cases}\text{入口}\quad U=\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{U_0}=\dfrac{2}{3},V=0\\ \text{出口}\quad \dfrac{\partial U}{\partial X}=0,\ \dfrac{\partial V}{\partial X}=0\\ \text{壁面}\quad U=V=0\end{cases}\tag{2}$$

整个计算域内部的初始条件为

$$T=0,\ U=V=0,\ P=0\tag{3}$$

1.3　三维数学模型

三维模型，除了在垂直于纸面方向增加了一个维度及其坐标轴 z 以外，其他几何量和物理量与上述二维模型完全相同。新增轴 z 方向的两个边界都取对称边界条件，z 的坐标原点取在中心对称面上。

针对图 1 给出的物理模型(图 1 在 z 方向仅给出了计算区域的一半对称区域)，建立如下三维数学模型。

补充定义如下无量纲量：

$$Z=\frac{z}{H},\ W=\frac{w}{U_0}$$

式中：z 为空间坐标量；w 为 z 方向的速度分量。

图 1 所示的突扩突缩通道内强制流动的三维无量纲控制微分方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial T}+U\dfrac{\partial U}{\partial X}+V\dfrac{\partial U}{\partial Y}+W\dfrac{\partial U}{\partial Z}=\\ \quad-\dfrac{\partial P}{\partial X}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right)\\ \dfrac{\partial V}{\partial T}+U\dfrac{\partial V}{\partial X}+V\dfrac{\partial V}{\partial Y}+W\dfrac{\partial V}{\partial Z}=\\ \quad-\dfrac{\partial P}{\partial Y}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)\\ \dfrac{\partial W}{\partial T}+U\dfrac{\partial W}{\partial X}+V\dfrac{\partial W}{\partial Y}+W\dfrac{\partial W}{\partial Z}=\\ \quad-\dfrac{\partial P}{\partial Z}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right)\\ \dfrac{\partial U}{\partial X}+\dfrac{\partial V}{\partial Y}+\dfrac{\partial W}{\partial Z}=0\end{cases}\tag{4}$$

相应的无量纲边界条件为

$$\begin{cases}\text{入口}\quad U=\dfrac{2}{3},\ V=0,\ W=0\\ \text{出口}\quad \dfrac{\partial U}{\partial X}=0,\dfrac{\partial V}{\partial X}=0,\dfrac{\partial W}{\partial X}=0\\ Z=\pm H\dfrac{\partial U}{\partial Z}=\dfrac{\partial v}{\partial Z}=W=0\end{cases}\tag{5}$$

整个计算域内部的初始条件为

$$T=0,\ U=V=W=0,\ P=0\tag{6}$$

1.4 数值方法和网格无关性验证

本文所有的计算采用基于原始变量的有限容积法和Quick差分格式。非稳态项采用二阶隐式差分格式离散，压力与速度的耦合采用Simple方法[26]。迭代计算的收敛指标为迭代残差小于10^{-5}。

为保证计算精度和计算效率，采用二维结构化网格对计算区域进行划分。考虑到局部流动细节，壁面和突扩突缩截面附近的网格被细化。对Er=6、Ar=1.83的突扩突缩管，采用不同网格总量对O点和Q点的速度进行对比，以进行网格独立性验证。根据网格独立性验证结果，60 000个网格总量和90 000个网格总量的结果相差不到1%，最终选用60 000个网格总量。

本文计算的Re范围小于Rec3(数值解发生振荡的临界Re)的流动是稳态的，与时间无关的。此时，无量时间步长ΔT取值不影响收敛后的计算结果，取值固定在ΔT=10^{-2}，在Re大于Rec3时，流动是随时间变化且振荡的；ΔT在10^{-4}～10^{-3}范围内取值时，Re越大，无量纲时间步长取值越小。

2 数值模拟结果和讨论

2.1 三维数学模型具有二维解的证明

以上给出的三维数学模型方程(4)及其边界条件式(5)，存在与二维数学模型完全相同的二维解。这个证明如下：设$U_1(T, X, Y)$、$V_1(T, X, Y)$、$Q_1(T, X, Y)$满足方程(1)及其边界条件式(2)，即是二维数学模型的解，然后将$U_1(T, X, Y)$、$V_1(T, X, Y)$、$Q_1(T, X, Y)$及$W_1(T, X, Y, Z)$=0代入到方程(4)及其边界条件式(5)，就会发现，$U_1(T, X, Y)$、$V_1(T, X, Y)$、$Q_1(T, X, Y)$及$W_1(T, X, Y, Z)$=0满足这些方程及其边界条件，因此是三维模型的解。为了节省篇幅，这里略去具体的代入过程。

由于对二维模型的分析和数值求解的难度及工作量远低于三维模型的，因此，三维模型与二维模型具有相同的解是人们所期待的，这样，就可以用较简单的二维模型的求解和分析，替代复杂的三维模型的求解与分析。事实上，以往的许多文献资料通常就是这样做的。但是，下面根据数值解进行的分析将能够看到，在没有非线性现象出现时，二维模型和三维模型的解是稳态的、对称的、唯一的，这时二维模型与三维模型的解完全一致，因此用二维模型的解作为三维问题的解，或近似作为三维问题的解，没有任何问题。但当非线性的现象出现时，数值解不唯一。尽管这时三维模型仍然存在与二维模型相同的二维解，而三维模型同时还存在无法由二维模型获得的三维解，即坐标轴z方向速度分量W≠0，因此，在坐标轴z取不同值的位置，沿x-y轴方向的各截面的速度分布，也是不同的，与z的位置有关。

本文是要证明：即使如图1所示的对称结构，或者在z方向长度比较大(理论上无限长，可忽略边缘效应)，由于非线性的原因，简化的二维模型的分析与解可以代替三维模型。以往的研究文献，常常忽视了非线性现象对实际工程问题带来的影响。

2.2 二维模型的解及解的分岔

二维模型的数值计算结果表明，随着Re的增加，所得到的数值解出现了解的分岔。根据解的主要特征，可以分为4个区域：唯一对称解；一个对称解(不稳定)和2个非对称解(稳定)，发生了音叉分岔；高(阶)Re唯一对称解，发生了反音叉分岔；振荡解和混沌解，发生了动态hopf分岔。

图2给出了二维模型Re=120、200、280时，几个不同截面(取不同X值)的无量纲速度分量U在Y方向的分布。由图2(a)可见，当Re=120时，截面速度分布曲线关于X轴(Y=0)是完全对称的，并且出现了流体的回流(U<0)。

由图2(c)、(d)可见，截面速度分布曲线关于X轴(Y=0)都是非对称的，并且也都有流体的回流(U<0)出现。图2(c)给出的解，与图2(d)给出的解，Re都是200，这是一对关于X轴(Y=0)反对称的非对称解。

这里需要说明的是，当Re=120、200时，数值解在经历初始阶段随时间变化后，不再随时间变化，即进入了稳态流动。当Re=120时，数值解是唯一的、对称的、稳态的；但当Re=200时，数值解不是唯一的，至少有3个解。图2(c)、(d)给出的是这3个解中的一对反对称的稳态非对称解。这3个解中还有一个是对称解。但这个对称解是不稳定的，用全区域的数值计算得不到这个对称解。很容易证明，本文所给出的二维数学模型(式(1)～(3))和三维数学模型(式(4)～(6))都存在对称解。但只有当对称解是稳定的，才能够通过全区域数值计算得到，例如图2(a)

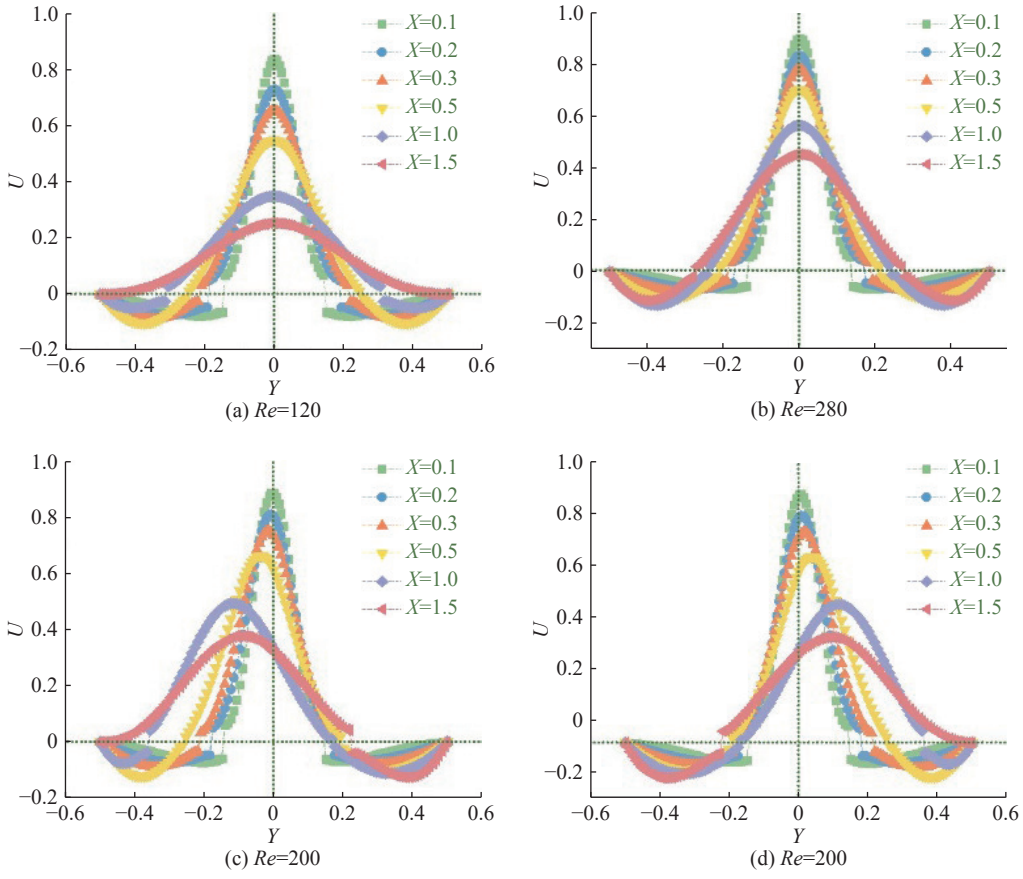


图 2　不同 *Re* 下各截面上的速度分布

Fig.2　The velocity profiles in different sections at different *Re*

给出的 *Re*=120 时的速度分布。

由图 2(b)可以看到，当 *Re* 从 200 增加到 280 时，发生了所谓的反音叉分岔：流场的数值解从 *Re*=200 时的一对反对称的非对称解，变成了当 *Re*=280 时的稳态的、唯一的对称解。

图 3(a)给出了 *Re*=352 时，在流动区域中的观测点 *Q*(0.2, 0) 的速度 *V* 的时间序列。可见，观测点 *Q* 的速度 *V* 随时间周期性振荡。图 3(b)给出的是观测点 *Q* 的速度分量 *U* 和 *V* 构成的速度相图，为一封闭的环状轨线，表明数值解随时间周期性振荡。随着 *Re* 的继续增加，当 *Re*=380 时，数值解发生倍周期振荡；*Re*=600 时，数值解分岔为混沌解，如图 3(c)、(d)所示。

二维模型的数值结果表明：针对本文给出的物理和数学模型，当 *Re*=120 时，数值解为唯一的对称解；*Re*=200 时，有两个非对称的数值解和一个不稳定的对称解；当 *Re*=280 时，数值解又回归为唯一的对称解；当 *Re*=352 时，数值解为周期振荡解；当 *Re*=380 时，数值解发生倍周期振荡；最后在 *Re*=600 时，进入混沌。也就是说，二维模型的数值解经历了静态音叉分岔和反音叉分岔，以及动态的 hopf 分岔。

2.3　三维模型的解及与二维模型解的差异

计算结果表明，随着 *Re* 的增加，三维模型的数值解出现了与二维模型类似的非线性现象和解的分岔。但三维模型的非线性特性及分岔点与二维的不一定相同，且在某些 *Re* 的取值范围内，出现了 *Z* 方向的流动，即 $W\neq 0$，流动是三维的。对于本文的研究模型，*Z* 方向的两个边界给出的是对称边界条件，正如前面已经证明过的，所给出的三维数学模型存在纯二维解。由数值模拟可以看到，流动出现了三维解，表明解不是维一的。这时的二维解无法表征三维流动。

图 4 给出了 *Re*=120 时，*Z* 方向几个不同截面 *Z*= −0.5、0、0.5 的无量纲速度分量 *U* 的分布图。由图 4 可见，几个截面的速度分布完全相同，都稳态的、对称的、唯一的，且与图 2 的二维结果完全相同。在 *Re*=120 时，整个计算区域数值计算获得的所有 *Z* 方向的速度分量 $W(X, Y, Z, T)=0$。

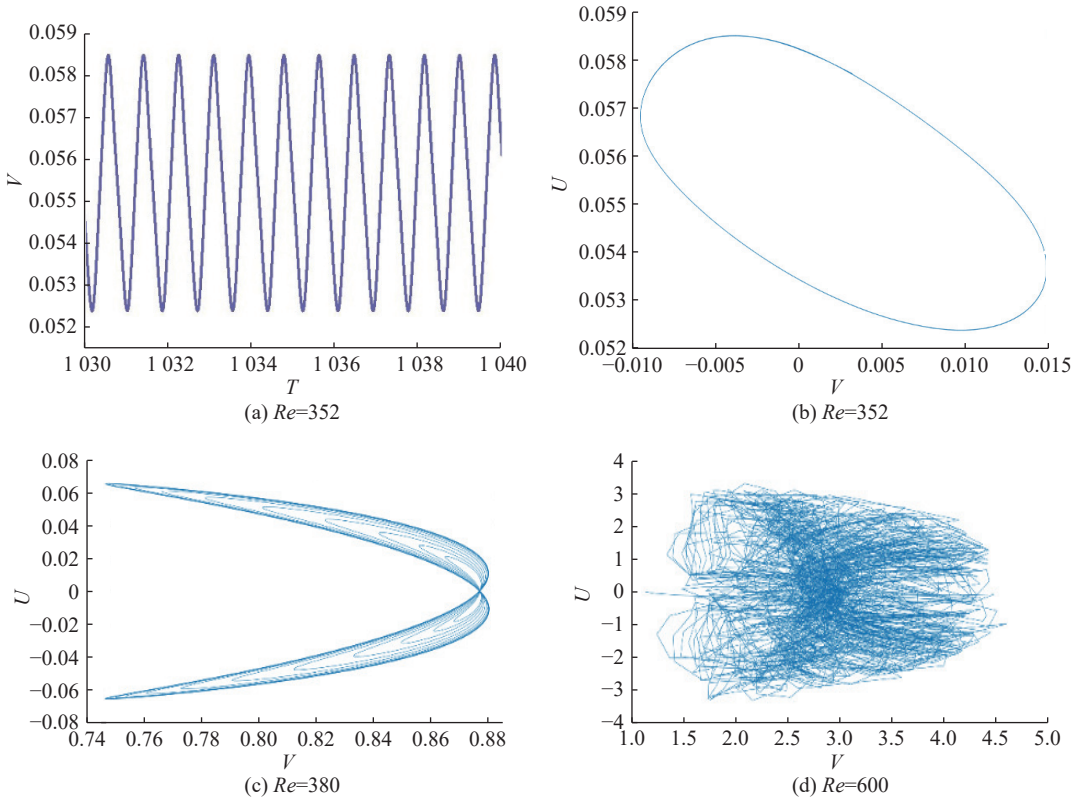


图 3　在不同 *Re* 下，*Er*=6.00、*Ar*=1.83 时，点 *Q*(0.2,0)在 *x*、*y* 方向上的相空间的轨迹

Fig.3　Trajectories in-state space of *x*-and *y*-velocities at point *Q* (0.2, 0) for *Er*=6.00，*Ar*=1.83 at different *Re*

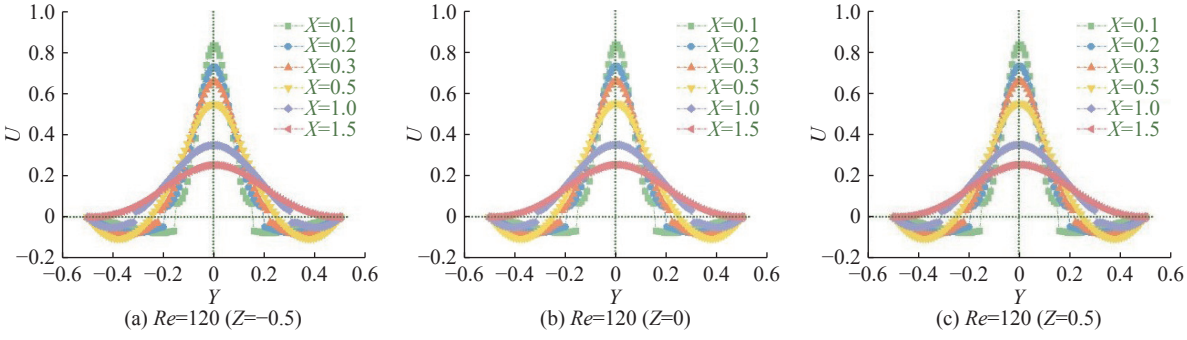


图 4　*Re*=120 不同截面上的速度分布

Fig.4　The velocity profiles in different sections for *Re*=120

图 5 给出了 *Re*=200 时 *Z* 轴 3 个截面的速度分布图。由图 5(a)~(c)可见，这 3 个截面的速度分布相同，且与图 2(d)完全相同。图 5(e)~(f)是在 *Re*=200 时 *Z* 轴 3 个截面上速度分布的另一组解，与图 5(a)~(c)是反对称的，与图 2(c)完全相同。由图 5 给出的这些数值结果可见，在 *Re*=200 时，三维模型的数值解与二维模型的解完全相同，整个流场的 *Z* 方向速度分量 *W*=0，且存在一对反对称的稳态非对称解，出现了解的音叉分岔。

图 6 和图 7，分别给出了 *Re*=280 时，在 *Z* 轴上 3 个位置 *Z*=−0.5、0、0.5 截面上的速度分量 *U* 和 *W* 的分布以及在 *Z* 轴 3 个截面上的速度云图。由图 6 与图 2(b)比较可见，三维模型中有不同于二维解的三维解存在，*Z* 方向的速度 *W*≠0。并且在 *Re*=280 时，二维模型中出现的反音叉分岔，在三维模型中没有出现。图 7(a)~(c)给出了在 *Re*=280 时，*Z* 方向速度分量 *W* 分布图。

图 8 给出了三维模型在 *Re*=330 时，*Z*=−0.5、0、0.5 的速度分量 *U* 的分布图。由图 8 可见，三维模型的速度分布关于 *X* 轴是对称的、唯一的、稳态的，没有三维流动出现，即 *W*=0 流动是二维的。并且，三维模型出现了反音叉分岔。

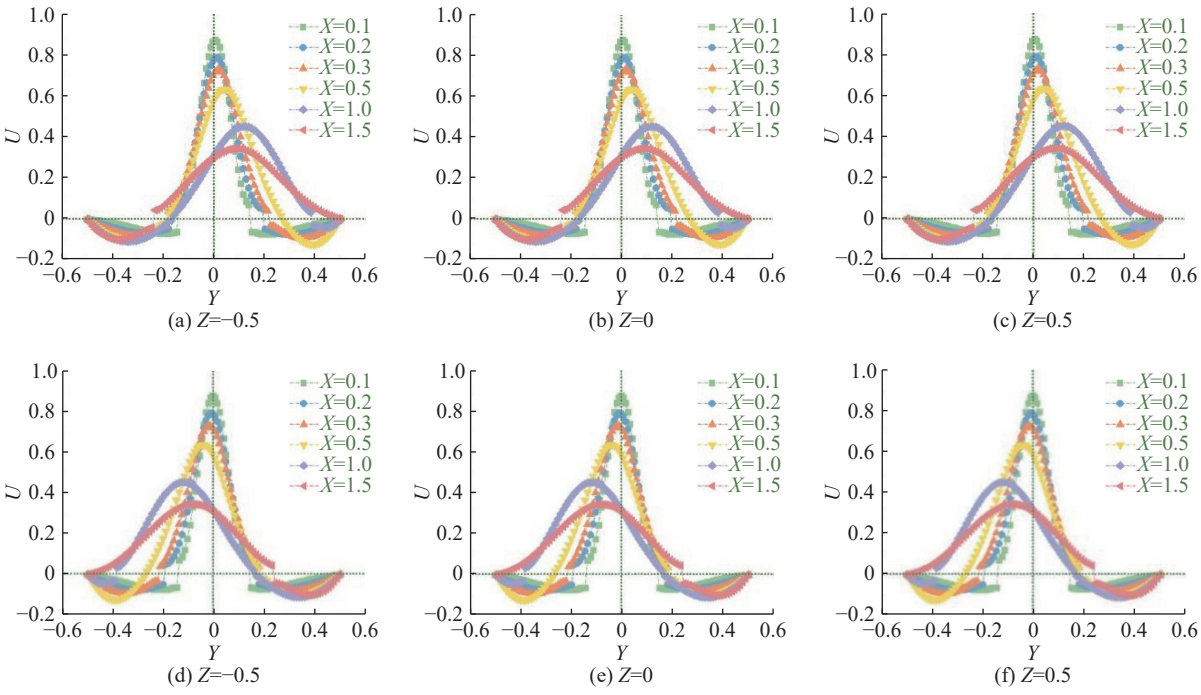


图 5　*Re*=200 不同截面上的速度分布

Fig.5　The velocity profiles in different sections for *Re*=200

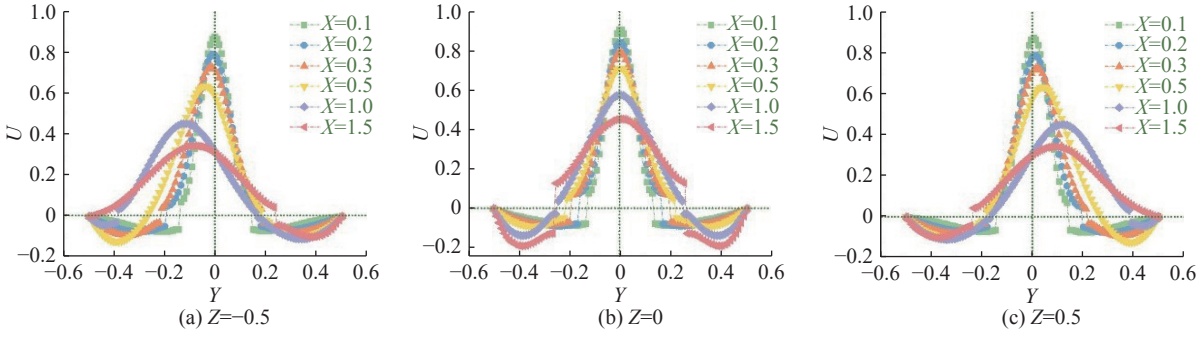


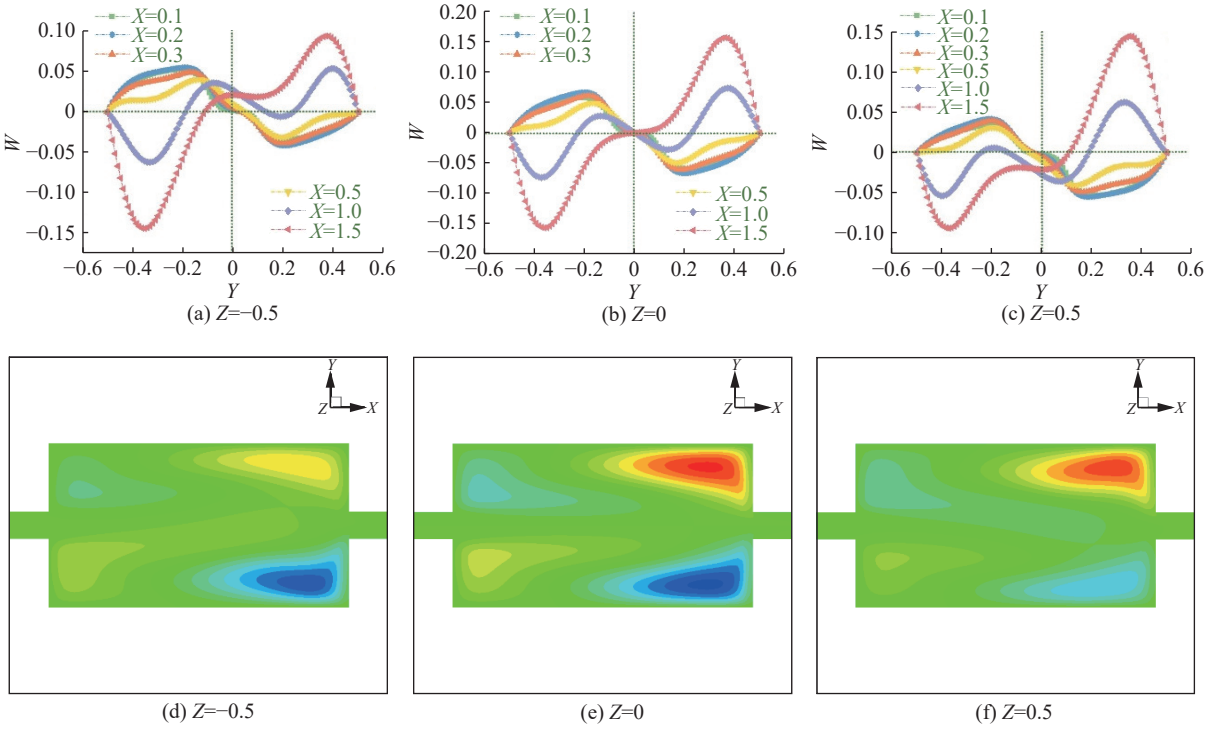
图 6　*Re*=280 不同截面上的速度分布

Fig.6　The velocity profiles in different sections for *Re*=280

图 9 给出了 $Re\geqslant 120$ 的几个不同 Re 取值时在 Z 方向两个对称点 $Q_1(0.2, 0, -0.5)$ 与 $Q_2(0.2, 0, 0.5)$ 速度分量 W 的时间序列。由图 9 可见，Re=120、200、330，W=0 且与时间无关（3 条 W=0 的水平直线是重合的），表明这时的流动为二维，稳态。而当 Re=280 时，$W\neq 0$，但是一条水平直线，表明流动是三维的稳态。而 Re=352、380、600 时，流动是随时间振荡的且 $W\neq 0$，各截面的数值和振荡特性也不相同，表明流动是三维的和非稳态的。

图 10 给出了观测点的速度相图。由图可见，Re=352、380 时，$Q_1(0.2, 0, -0.5)$ 与 $Q_2(0.2, 0, 0.5)$ 运动轨迹是反对称的，为一封闭的环状轨线。而在 Z 方向的对称面上 Z=0，观测点 $Q(0.2, 0, 0)$ 的速度相轨迹为一双扭线。随着 Re 继续增加到 600 时，流动已进入混沌，速度相轨迹看上去是杂乱无章的，具有某种随机性。

综上所述，数值结果表明，针对本文给出的三维物理和数学模型，当 Re=120 时，数值解为唯一的对称二维解，三维解和二维解相同；Re=200时，有 2 个非对称的数值解和一个不稳定的对称解，二维解和三维解依然相同；Re=280 时，有 2 个稳定非对称的数值解和一个对称解，二维解和三维解在 Z=0 平面相同，在 Z=0.5 和 Z=−0.5 平面不相同；当 Re=330 时，数值解又回归为唯一的对称解，二维解和三维解恢复相同；当 Re=352 时，数值解为周期振荡解；Re=380 时，发生倍周期振

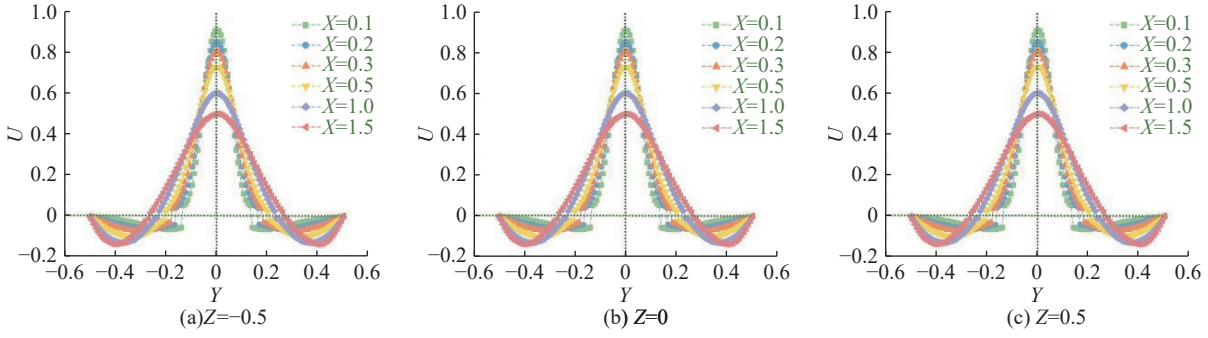


(a) Z=−0.5 (b) Z=0 (c) Z=0.5

(d) Z=−0.5 (e) Z=0 (f) Z=0.5

图 7 *Re*=280 不同截面上 *Z* 方向的速度分布

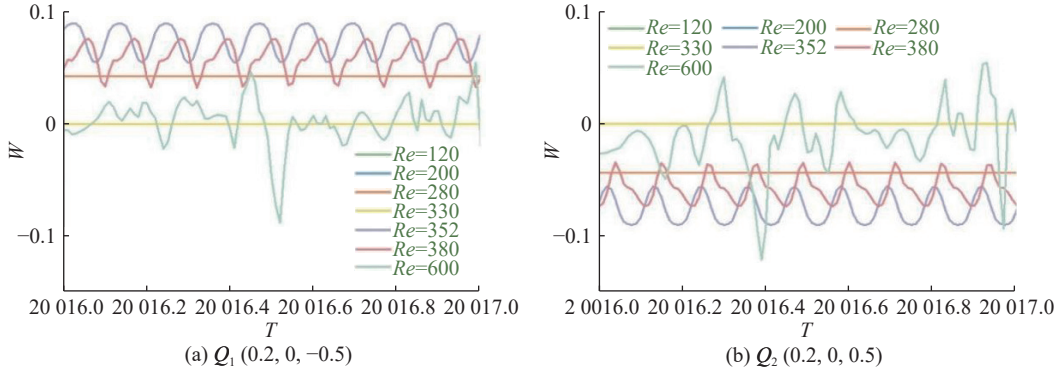
Fig.7 The velocity profiles in different sections for *Re*=280



(a)Z=−0.5 (b) Z=0 (c) Z=0.5

图 8 *Re*=330 不同截面上的速度分布

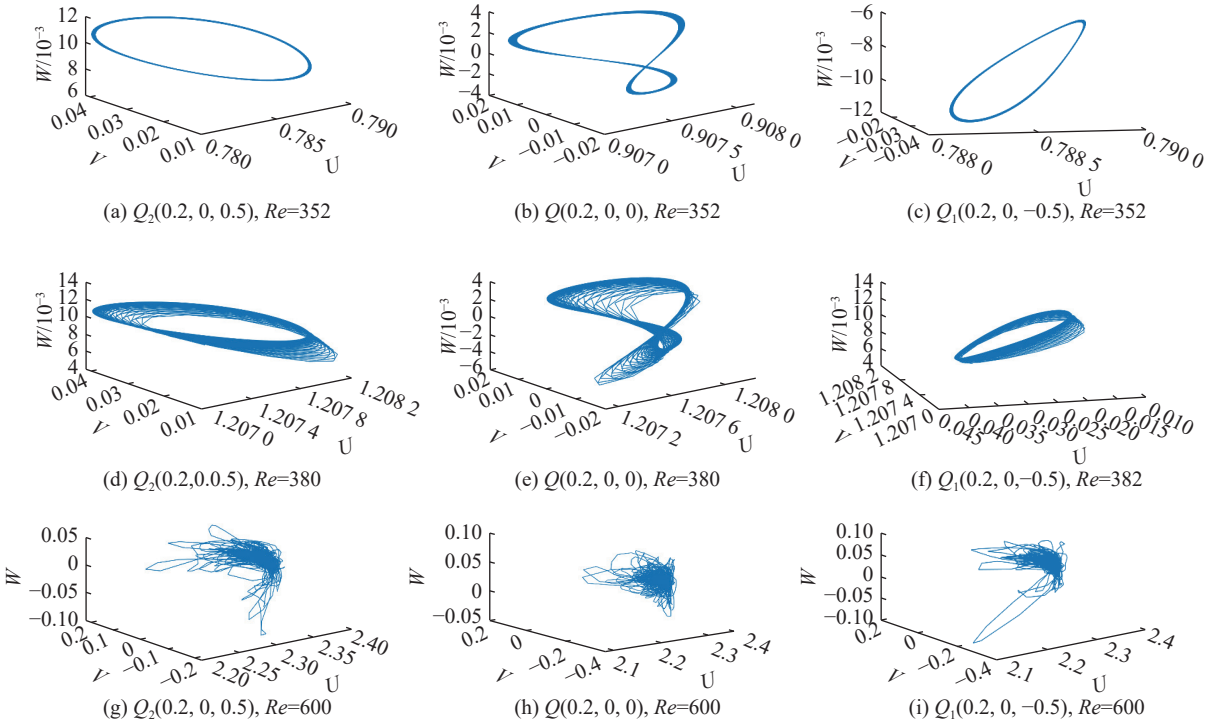
Fig.8 The velocity profiles in different sections for *Re*=330



(a) Q_1 (0.2, 0, −0.5) (b) Q_2 (0.2, 0, 0.5)

图 9 在不同 *Re* 值下，点 Q_1(0.2,0,−0.5) 和点 Q_2(0.2,0,0.5) 处速度的时间序列

Fig.9 Velocity at Q_1(0.2,0,−0.5) and Q_2(0.2,0,0.5) vs. T at different *Re*



(a) Q_2(0.2, 0, 0.5), *Re*=352　(b) Q(0.2, 0, 0), *Re*=352　(c) Q_1(0.2, 0, −0.5), *Re*=352

(d) Q_2(0.2,0.0.5), *Re*=380　(e) Q(0.2, 0, 0), *Re*=380　(f) Q_1(0.2, 0,−0.5), *Re*=382

(g) Q_2(0.2, 0, 0.5), *Re*=600　(h) Q(0.2, 0, 0), *Re*=600　(i) Q_1(0.2, 0, −0.5), *Re*=600

图 10　点 Q_1(0.2,0,−0.5)、Q(0.2,0,0)、Q_2(0.2,0,0.5) 在不同 *Re* 下的相空间轨迹

Fig.10　Trajectories in-state space at Q_1(0.2,0,−0.5)，Q(0.2,0,0) and Q_2(0.2,0,0.5) at different *Re*

荡；最后，在 *Re*=600 时，进入混沌。

3　结　论

a. 证明了三维模型存在与坐标轴 Z 无关的二维解。

b. 二维模型有唯一解、多个非对称解、振荡解。

当 *Re*=120 时，二维模型具有唯一的，对称的、稳态的速度分布；当 *Re*=200 时，二维模型的解不唯一，存在一对反对称的非对称解，但解仍然是稳态的；当 *Re*=280 时，二维模型的解恢复到具有唯一的、对称的、稳态的速度分布；当 *Re*=352，二维模型的解是振荡的、非稳态的。

c. 三维模型有唯一解、多个非对称解、振荡解。

当 *Re*=120 时，二维模型与三维模型都具有唯一的、对称的、稳态的速度分布，二维模型与三维模型的解完全相同；当 *Re*=200 时，二维模型与三维模型的解不唯一，存在一对反对称的非对称解，但解仍然是稳态的，且二维与三维模型的解依然完全相同，没有三维的流动；当 *Re*=280 时，二维模型与三维模型的解不同，三维模型出现了三维流动，但都具有一对非对称的、稳态的解；当 *Re*=330 时，二维模型与三维模型都恢复到具有唯一的，对称的、稳态的速度分布，二维模型与三维模型的解完全相同；当 *Re*=352、380、600 时，二维模型与三维模型的解都是振荡的、非稳态的。解从周期振荡、倍周期振荡，发展为混沌。二维模型与三维模型具有不同的解。

参考文献：

[1] YANG L Q, YANG M, HUANG W J. Nonlinear phenomena of fluid flow in a bioinspired two-dimensional geometric symmetric channel with sudden expansion and contraction[J]. Mathematics, 2024, 12(4): 553.

[2] ZHANG K, YANG M, ZHANG YW. Two- and three-dimensional numerical simulations of natural convection in a cylindrical envelope with an internal concentric cylinder with slots[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, 70: 434−438.

[3] TITZE I R. The physics of small - amplitude oscillation of the vocal folds[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1988, 83(4): 1536−1552.

[4] VAN HOUTTE E, VAN LIERDE K, D'HAESELEER E, et al. The prevalence of laryngeal pathology in a treatment - seeking population with dysphonia[J]. The Laryngoscope, 2010, 120(2): 306−312.

[5] MITTAL R, ERATH B D, PLESNIAK M W. Fluid dynamics of human phonation and speech[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2013, 45: 437−467.
[6] TITZE I R. Physiologic and acoustic differences between male and female voices[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1989, 85(4): 1699−1707.
[7] MCCOLLUM I, THROOP A, BADR D, et al. Gender in human phonation: fluid-structure interaction and vocal fold morphology[J]. Physics of Fluids, 2023, 35(4): 041907.
[8] ŠIDLOF P, ZÖRNER S, HÜPPE A. A hybrid approach to the computational aeroacoustics of human voice production[J]. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2015, 14(3): 473−488.
[9] DRIKAKIS D. Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows[J]. Physics of Fluids, 1997, 9(1): 76−87.
[10] REVUELTA A. On the two-dimensional flow in a sudden expansion with large expansion ratios[J]. Physics of Fluids, 2005, 17(2): 028102.
[11] SOBEY I J, DRAZIN P G. Bifurcations of two-dimensional channel flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 171: 263−287.
[12] FEARN R M, MULLIN T, CLIFFE K A. Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1990, 211: 595−608.
[13] SHAPIRA M, DEGANI D, WEIHS D. Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels[J]. Computers & Fluids, 1990, 18(3): 239−258.
[14] BATTAGLIA F, TAVENER S J, KULKARNI A K, et al. Bifurcation of low Reynolds number flows in symmetric channels[J]. AIAA Journal, 1997, 35(1): 99−105.
[15] CHIANG T P, SHEU T W H, HWANG R R, et al. Spanwise bifurcation in plane-symmetric sudden-expansion flows[J]. Physical Review E, 2001, 65(1): 016306.
[16] GUEVEL Y, ALLAIN T, GIRAULT G, et al. Numerical bifurcation analysis for 3-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2018, 87(1): 1−26.
[17] MOALLEMI N, BRINKERHOFF J R. Numerical analysis of laminar and transitional flow in a planar sudden expansion[J]. Computers & Fluids, 2016, 140: 209−221.
[18] SAHA S, BISWAS P, DAS A N, et al. Analysis of blood flow bifurcation phenomena in mitral valve: a numerical approach to predict cardiac arrest[J]. Journal of Applied Fluid Mechanics, 2023, 16(3): 491−504.
[19] LASKOS V N, KOTSOPOULOS T, KARPOUZOS D, et al. Numerical investigation of the three-dimensional flow around a surface-mounted rib and the onset of unsteadiness[J]. Mathematics, 2023, 11(12): 2601.
[20] WANG Z Y, ZU S S, YANG M. Numerical simulation on forced convection over a circular cylinder confined in a sudden expansion channel[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2018, 91: 48−56.
[21] LI Y B, YANG M, ZHANG Y W. Asymmetric phenomenon of flow and mass transfer in symmetric cylindrical and semi-cylindrical shallow chambers[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2021, 123: 105174.
[22] LI Y B, YANG M, ZHANG Y W. Bifurcation analysis of coupling thermosolutal convection induced by a thermal and solutal source in a horizontal cavity[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2021, 126: 105455.
[23] MIZUSHIMA J, OKAMOTO H, YAMAGUCHI H. Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part[J]. Physics of Fluids, 1996, 8(11): 2933−2942.
[24] MIZUSHIMA J, SHIOTANI Y. Transitions and instabilities of flow in a symmetric channel with a suddenly expanded and contracted part[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2001, 434: 355−369.
[25] 任泽霈. 对流换热 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 64–65.
[26] PATANKAR S. Numerical heat transfer and fluid flow[M]. Boca Raton: CRC Press, 1980.

（编辑：董 伟）