文章编号:1007－6735(2025)06－0718－08　DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.20241115001

空间桁架结构自适应成长优化设计

熊　敏[1]，　林传开[1]，　丁晓红[1]，　唐广东[2]，　张　横[1]
（1. 上海理工大学 机械工程学院，上海 200093；2. 飞而康快速制造科技有限责任公司，无锡 214145）

摘要：为实现高刚轻质的桁架结构，提出了一种基于植物分支系统生长机理的空间桁架结构优化设计方法。通过模拟植物在自然环境中的生长、分支和退化过程，使空间桁架结构能够根据载荷和边界条件自适应地进行生长，直接获得桁架结构分布和型材尺寸信息。对典型空间桁架结构中的简支梁型桁架、悬臂梁型桁架及 L 型桁架结构分别在弯曲工况和扭转工况下进行了设计讨论。结果表明，设计方法能够快速收敛到最优结构布局，不受基结构网格密度影响。进一步对工程应用实例扶梯桁架进行设计验证，优化后的扶梯桁架提高了刚度，减轻了重量，实现了高刚轻质的设计目标，表明设计方法具有较好的工程应用潜力。

关键词：空间桁架；植物分支系统；自适应成长；结构优化设计；扶梯桁架
中图分类号：TH 122　　**文献标志码：**A

Adaptive growth optimization design of space truss structures

XIONG Min[1], LIN Chuankai[1], DING Xiaohong[1], TANG Guangdong[2], ZHANG Heng[1]
(1. *School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*; 2. *Feierkang Rapid Manufacturing Technology Co., Ltd., Wuxi 214145, China*)

Abstract: To obtain high stiffness and lightweight truss structures, a space truss structure optimization design method based on the branching growth mechanism of plants was proposed. By simulating the growth, branching, and degeneration processes of plants in natural environments, the space truss structure can adaptively grow based on load and boundary conditions, directly obtaining information on truss distribution and profile dimensions. Design discussions were conducted on the typical space truss structure, including simply supported beam-type truss, cantilever beam-type truss, and L-shaped truss under bending and torsion conditions. The results demonstrate that the design method converges quickly to the optimal structural layout, unaffected by the base structure's mesh density. Further design

收稿日期: 2024−11−15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52375257)
第一作者: 熊　敏(1978—)，女，副教授．研究方向：结构优化设计、仿生优化设计．E-mail：xiongmin@usst.edu.cn
通信作者: 丁晓红(1965—)，女，教授．研究方向：仿生智能结构设计．E-mail：dingxh@usst.edu.cn

引文格式: 熊敏，林传开，丁晓红，等．空间桁架结构自适应成长优化设计[J]．上海理工大学学报，2025，47(6)：718-725.
Citation: XIONG Min, LIN Chuankai, DING Xiaohong, et al. Adaptive growth optimization design of space truss structures[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2025, 47(6): 718-725.

validation was carried out on a practical example of an escalator truss. The optimized escalator truss improved stiffness, reduced weight, and achieved the design goal of high stiffness and lightweight, indicating the method's strong potential for engineering applications.

Keywords: *space truss*; *plant branching system*; *adaptive growth*; *structural optimization design*; *escalator truss*

空间桁架结构由于良好的结构稳定性和承载能力使其在众多领域得到广泛应用，尤其是在需要大跨度支撑的场合，如厂房、体育馆、桥梁及商场扶梯等公共建筑。为了有效保证结构的安全性，合理分布桁架型材是关键。桁架型材的分布设计过程往往高度依赖设计人员的经验，导致型材的分布和尺寸设置较为保守，从而造成材料浪费和成本增加。因此，一些学者采用渐进结构优化法[1]、均匀化方法[2]、变密度法[3]、水平集法[4]等拓扑优化设计方法结合基结构法对桁架结构设计进行了探索和应用。针对桁架结构刚度最大化问题，才琪等[5]基于满应力设计准则，并结合最小能量原理，采用渐进结构优化方法推导出了刚度最大化问题的计算公式。Kim 等[6]将节点刚度作为连续变化的设计变量，提出了一种能够同时优化桁架布局和节点位置的最大刚度问题的拓扑优化方法。针对结构稳定性问题，Ohsaki 等[7]将应力约束下的桁架拓扑优化问题转化为混合整数规划问题，通过预设节点连接杆数量的下限值来保证桁架的稳定性，显著降低了计算成本。付志方等[8]则考虑了节点在小范围内的移动，提出了一种桁架结构的稳健拓扑优化方法。总体来说，目前的研究大多先通过拓扑优化方法获得合理的桁架结构拓扑，然后对桁架型材进行尺寸优化设计，导致设计结果的最优性有所损失。而在面对大规模结构设计时存在设计效率的问题，对空间桁架布局和型材尺寸同时进行优化设计则可解决以上问题。

在面对规模庞大和高复杂性问题时，仿生优化设计技术能够提供快速简便且实用的解决方案。丁晓红等[9]研究了自然界中的分支系统和植物根系的生长机制，提出了自适应成长法（adaptive growth method, AGM）。该方法已成功应用于板壳结构加筋[10-11]、传热结构[12]以及平面桁架结构[13]的优化设计。

本文将自适应成长机理拓展到空间桁架结构的拓扑优化设计中，实现空间桁架布局和型材尺寸的同步优化，在保证结构最优性的同时，提升大规模工程问题的设计效率。

1　设计方法

1.1　空间桁架基结构

如图 1(a) 所示，四角简支和中部两侧分别有集中力 F 的设计域，如何按设计要求合理分布空间桁架？首先需要建立设计域基结构。

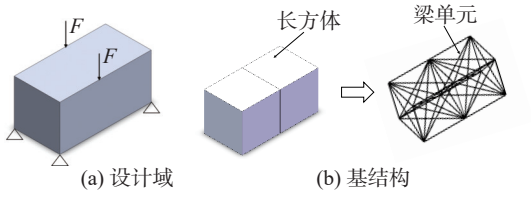


图 1　空间桁架结构

Fig.1　Space truss structures

将设计域剖分为长方体，然后两两连接任意长方体的 2 个顶点构建梁单元，可以获得由梁单元组成的基结构，如图 1(b) 所示。图中的基结构是由 28 个梁单元组成的桁架基结构模型。

1.2　空间桁架自适应成长机理

自然界的分支系统通常具备多种性质和功能，这些特性是根据不同的生长环境逐渐发展演化而来的。例如，植物的根系会向水源生长，以获取水分和营养物质，同时也会分支和弯曲，以适应地面的不同形态和结构，如图 2 所示。植物的根系主要由主根、侧根和须根组成。主根从种子萌发后生长而出，逐渐分化出侧根，而侧根进一步分化为须根。主根和侧根主要负责物质的运输，须根则与周围环境进行物质交换。尽管自然界中植物根系的形态千差万别，这些形态主要受植物自身基因的控制，但同一种植物在不同环境中的根系形态也会表现出显著差异，这表明根系形态在很大程度上受到生长环境的影响，并具有

自适应环境的功能。植物根系的自适应成长规律可归纳为趋水性、屈重力性和向触性。根系形态的形成正是在这些规律的引导下，通过生长、分化和退化等过程，实现整体功能的最优化。

图 2 植物根系

Fig.2 Plant root system

如果把空间桁架结构的分布看成是一个逐渐形成的过程，那么希望这个过程能像自然界分支系统一样自适应于一定的工作条件，在材料体积的约束下使整体结构逐步趋向具有最佳力学性能的最优结构。

桁架结构在一定的载荷作用下，由于受载变形而产生的内部能量场，可类比于自然界分支系统的生长环境。如植物根系的生长过程，主根总是从种子出发，依据自适应成长规律，沿着能使其整体功能最优的方向生长并分歧出侧根。因此，在桁架结构布局设计中，根据约束条件，确定最初开始生长的“种子点”位置，如图 3(a) 中的红点。与“种子点”相连的梁单元可以根据一定的力学规则生长，如图 3(b) 所示；梁单元生长到一定的尺度，可以“分歧”，与“分歧点”相连的梁单元在下一步迭代中可以参与生长或退化，梁单元退化到一定的尺度，则“消失”，如图 3(c)。这个过程反复进行，直至满足收敛条件，结束生长过程。

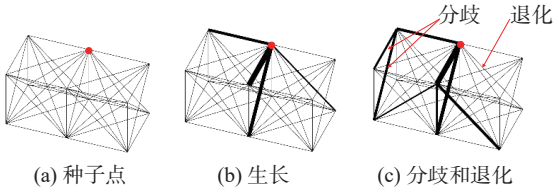


图 3 自适应成长过程

Fig.3 Adaptive growth process

1.3 优化数学模型

为了实现高刚轻质的桁架结构，优化设计目标为最小化结构应变能，设计变量为梁单元的横截面面积，以材料体积作为约束条件，具体数学优化模型如式 (1) 所示。

$$\begin{cases} \text{find } \boldsymbol{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)^{\mathrm{T}} \\ \min\{U(\boldsymbol{A})\}=\sum_{i}^{n}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{u}_i \\ \text{s.t.} \\ g(\boldsymbol{A})=V-\eta V_0\leqslant 0 \\ 0<A_{\min}\leqslant A_i\leqslant A_{\max},i=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{A}$为梁单元截面面积矩阵；A_i为第 i 个梁单元的截面面积；n为梁单元总数量；$U(\boldsymbol{A})$为结构柔度；$\boldsymbol{u}_i$为各个单元的单元位移矩阵；$\boldsymbol{k}_i$为各个单元的单元刚度矩阵；V和V_0分别为梁单元总体积和设计域体积；η为给定的体积分数；$A_{\min}$和$A_{\max}$分别为设计变量的上下限。

1.4 灵敏度分析

梁单元的灵敏度信息和自然界植物的遗传基因具有一定的相似性。植物的生长趋势主要受先天遗传基因和生长环境的影响，梁单元的生长、分歧和退化主要受目标函数关于设计变量的灵敏度信息影响。将结构柔度 $U(\boldsymbol{A})$对设计变量A_i求导，可得目标函数对设计变量的灵敏度S_i为

$$S_i=\frac{\partial U}{\partial A_i}=\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{k}_i}{\partial A_i}\boldsymbol{u}_i \tag{2}$$

1.5 优化设计流程

空间桁架结构优化设计方法的主要设计流程如图 4 所示，包括以下几个步骤：

步骤 1 建立基结构。根据节点信息，构建桁架基结构，依据设计域的边界条件，选择载荷点和约束点作为“种子点”，设置优化参数，包括体积分数η、初始梁单元面积A_0、设计变量上下限$A_{\min}$和$A_{\max}$、分歧阈值A_{b}、最大收敛容差ε、最大迭代次数N。

步骤 2 对结构进行有限元分析，计算目标函数值，以及每个活动梁单元的灵敏度。活动梁单元的生长方向和生长速度依赖于灵敏度，它可以提供梁单元截面积变化导致目标函数有效改善的信息。

步骤 3 利用移动渐近线算法（MMA）更新活动梁单元的横截面积以及梁单元的位置。若梁单元横截面积A_i大于分歧横截面面积A_{b}，则该梁单元具备生长能力，参与下一次的迭代优化；若$A_i\leqslant A_0$，则梁单元退化，不参与下一次的迭代优化。

步骤 4 如果 2 个相邻迭代步的目标函数U^{n+1}、U^n变化率大于收敛容差，则优化程序回到

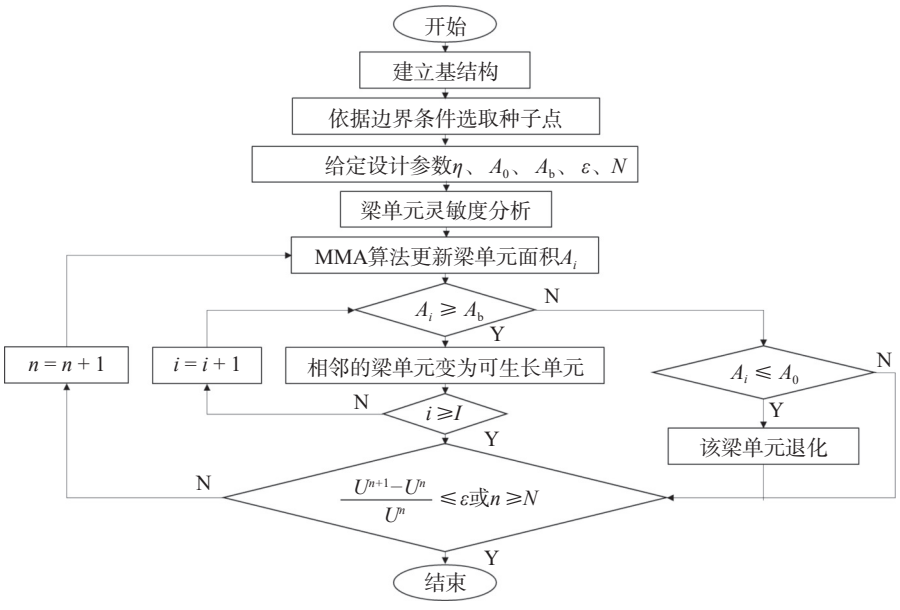


图 4　优化设计流程

Fig.4　Optimized design process

步骤 2，进入下一次的优化迭代过程，直至达到程序的收敛条件。收敛条件为连续 2 次目标函数值变化率小于收敛容差。

以上空间桁架结构自适应生长流程通过 Matlab 软件编程实现。

2　典型空间桁架结构设计算例

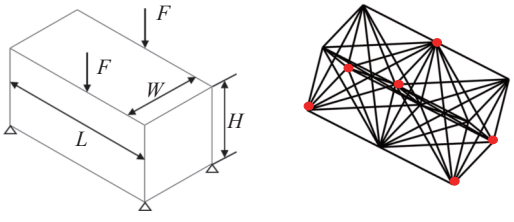
为了验证本文所提方法的有效性，对不同边界条件下的空间桁架典型结构，包括简支梁型桁架、悬臂梁型桁架以及 L 型桁架结构进行优化设计。

2.1　简支梁型桁架

如图 5(a) 所示为四角简支梁型桁架结构承受弯曲载荷，设计域的长宽高之比为 $L:W:H=2:1:1$，F=1 000 N。按上文所述，将设计域离散为图 5(b) 所示的基结构形式，梁单元数量为 50；选取约束位置和载荷点为“种子点”，即图中红点位置。设置材料弹性模量 E=210 GPa，泊松比 $\mu=0.3$，密度 $\rho=7.8\times10^3$ kg/m^3，给定设计参数 $\eta=0.3$，$A_0=1$ cm^2，$A_{\min}=2$ cm^2，$A_{\max}=10$ cm^2，$A_b=3$ cm^2，$\varepsilon=0.001$，$N=100$。

梁单元的生长过程和优化迭代曲线如图 6 所示，空间桁架优化设计结果中线条越粗表示梁单元横截面积越大，反之越小。浅色线条表示已经退化的梁单元。

如图 6 所示，在迭代初期，结构总柔度迅速



(a) 几何模型及边界条件　　(b) 基结构及种子点

图 5　简支梁型桁架

Fig.5　Simply supported beam-type truss

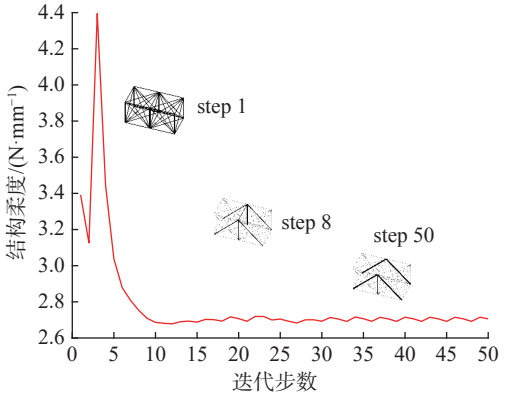
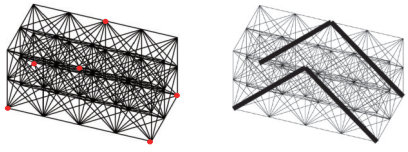


图 6　简支梁型桁架优化迭代曲线及梁单元生长过程

Fig.6　Optimized iteration curve of simply supported beam-type truss and beam element growth process

下降，随着迭代次数的增加，迭代曲线逐渐趋于收敛，结构柔度逐渐稳定，表明结果逐步趋近最优解。桁架结构优化设计结果如图 6 中的 step 50 所示，整体结构在载荷点和约束点之间形成封闭的连接，得到最短的传力路径。优化结果中，4 根梁横截面积均为 4.54 cm^2，计算用时 132.8 s。

为了探讨基结构网格密度对桁架结构优化的影响，将图 5(b) 所示的设计域实体单元网格加密，梁单元数量为 296，如图 7(a) 所示，种子点位置不变。优化设计结果如图 7(b) 所示，4 根梁单元横截面积均为 4.60 cm^2，与图 6 中的结果相近，计算用时 356.23 s。



(a) 基结构及种子点　　(b) 优化结果

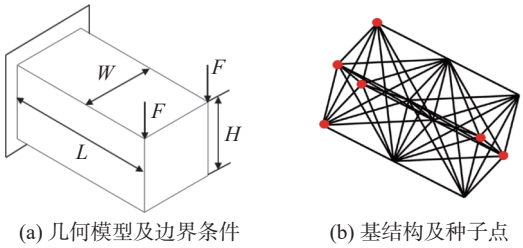
图 7　基结构密度增加

Fig.7　Increase of base structure density

由以上可得，无论基结构的数量如何，桁架结构优化结果都趋向于稳定，并且呈现相同的结构形态。梁结构在载荷点和约束点之间形成封闭的连接，获得了最短的传力路径，优化后梁的横截面积大小相近。这表明本文中的优化设计方法不受基结构数量的影响，因此，本方法在优化设计时可以采用网格密度小的基结构布局，从而使用较少的算力就可以获得最优的桁架结构布局。

2.2　悬臂梁型桁架

图 8(a) 展示了悬臂梁型桁架结构承受扭转载荷，其几何尺寸、材料属性与 2.1 中算例相同，约束和载荷如图 8(a) 所示，左侧端面全约束，右侧位置分别受到向上和向下的力 F，形成一个扭转载荷，F=1 000 N。基结构模型如图 8(b) 所示，基结构离散为 50 个梁单元，种子点位置如图中的红点所示。



(a) 几何模型及边界条件　　(b) 基结构及种子点

图 8　悬臂梁型桁架

Fig.8　Cantilever beam-type truss

扭转情况下的桁架结构拓扑优化迭代曲线如图 9 所示。梁单元从“种子点”开始生长，经过分歧和退化，在迭代 30 步时，结构达到了收敛状态，计算用时 27.9 s。桁架结构的最终布局如图 10 中的 step 32 所示，优化结果两侧对称，9 根梁的横截面积均为 2.12 cm^2。为了抵抗扭转载荷，桁架平面间形成了多个连接，从而提升结构的抗扭能力。

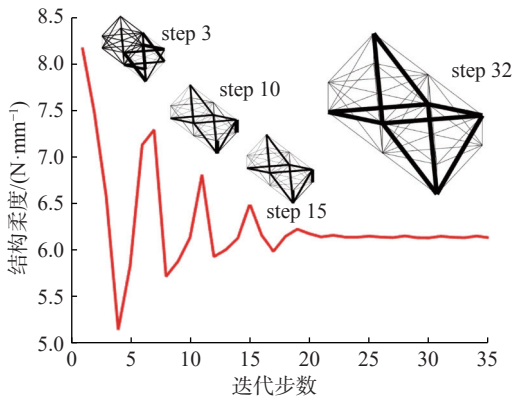


图 9　悬臂梁型桁架优化迭代曲线及梁单元生长过程

Fig.9　Optimized iteration curve of cantilever beam-type truss and beam element growth process

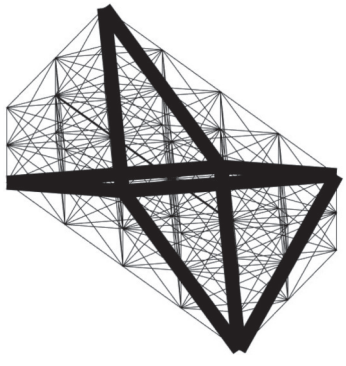


图 10　基结构密度增加悬臂梁型桁架优化结果

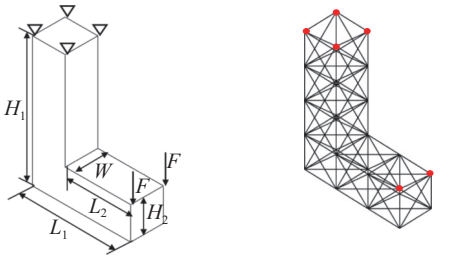
Fig.10　Optimized result of cantilever beam-type truss with increased base structure density

同理，为了验证基结构数量对优化结果的影响，将悬臂梁型桁架基结构进行加密处理，梁单元数量增加到 196。优化结果如图 10 所示，计算用时 147.2 s。从优化结果可以看出，2 种结构相同，从而也验证了本设计方法中优化设计结果不受基结构数量影响。

2.3　L 型桁架

L 型桁架结构的上端受到固定约束，底部两侧受到 F=1 000 N 的集中载荷。如图 11(a) 所示，桁架结构尺寸 L_1 : L_2 : W : H_1 : H_2=4 : 3 : 1 : 4 : 1，其基结构模型如图 11(b) 所示，种子点位置如图中红点所示。

L 型桁架结构的优化迭代曲线如图 12 所示。在迭代初期，结构的整体柔度快速下降，然后趋于稳定，优化结果如图 13(a) 所示。图 13(b) 为对比文献 [14] 中相同设计条件下的内点法设计结果。2 种设计方法得到了相同的桁架结构布局，但内点法只考虑了桁架结构布局，没有提供桁架横截面面积数据。相比之下，自适应成长法的设计



(a) 几何模型及边界条件　　(b) 基结构及种子点

图 11　L 型桁架结构

Fig.11　L-shaped truss structure

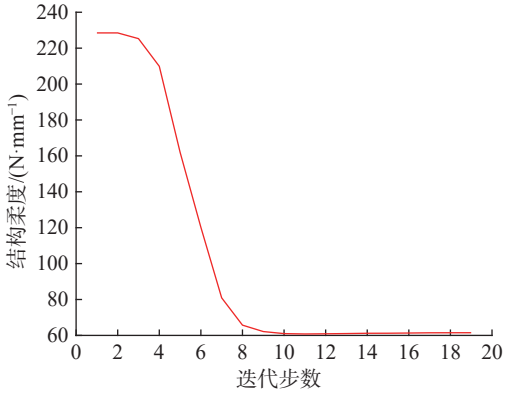
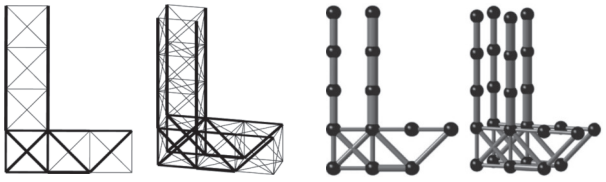


图 12　L 型桁架结构迭代曲线

Fig.12　Iteration curve of L-shaped truss structure



(a) AGM　　(b) 内点法

图 13　L 型桁架结构优化结果 [14]

Fig.13　Optimized results of L-shaped truss structures

结果更直接可用，易于制造。

3　扶梯桁架结构优化设计

3.1　设计问题及基结构

扶梯桁架为典型的空间桁架结构，主要用于承载乘客重量，支撑自动扶梯的踏板和扶手。同时，也用于固定自动扶梯的电动马达、链条和轮轴等组件。扶梯桁架通常由焊接的碳钢型材组成，包括上下端部托梁、上下弦材、横梁、斜材和其他支撑构件，如图 14 所示，上下端部托梁与建筑物固连。以某型号扶梯桁架为设计例，进一步验证所提设计方法。

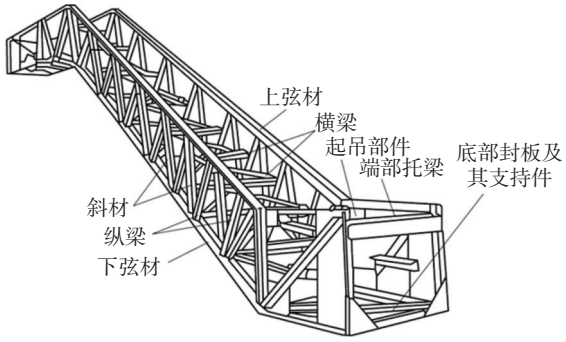


图 14　扶梯桁架结构

Fig.14　Escalator truss structure

扶梯尺寸全长 9476 mm，提升高度 3000 mm，原桁架结构如图 15 所示，乘客载荷和扶梯结构本身重量等效为桁架上的集中载荷，两侧载荷对称，上下端部托梁处约束所有自由度。

由于扶梯桁架内部装有供电梯运行的各种装置，故必须保证扶梯桁架内部有足够的安装空间，不设置基结构的中层连接。桁架上下端部托梁、上下弦材以及转折处的竖材为非设计域；扶梯

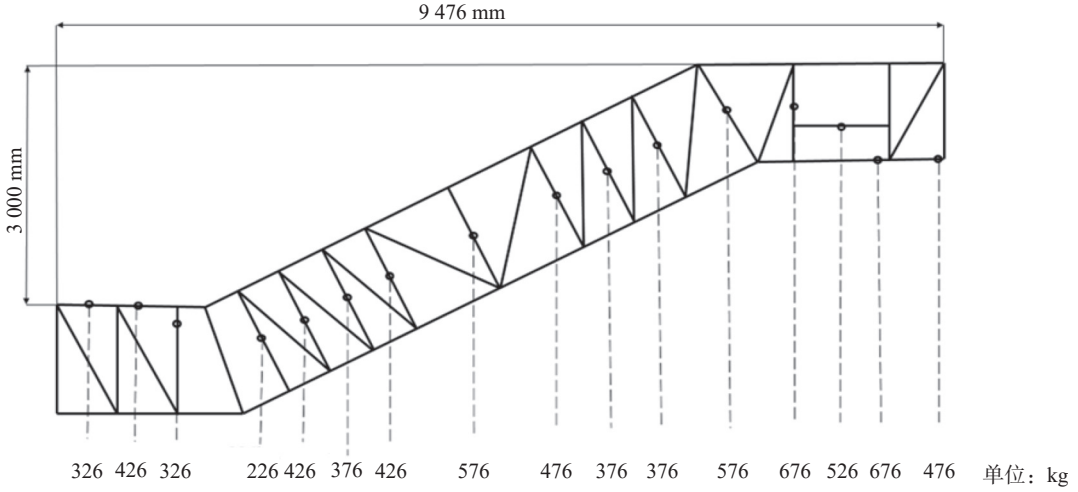


图 15　扶梯桁架结构简图及载荷

Fig.15　Structure sketch and load of escalator truss

桁架两侧为设计域，设计域基结构如图 16 所示。

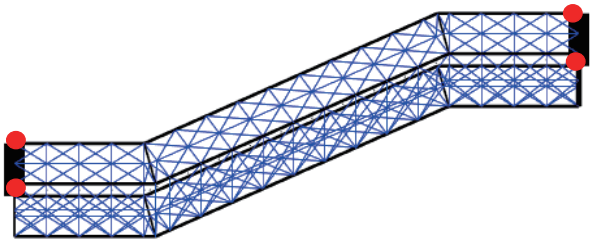


图 16 扶梯桁架基结构及种子点

Fig.16 Base structure of escalator truss and seed points

选定约束点为“种子点”，共 4 个点，如图 16 红点位置所示，扶梯材料参数和 2.1 中相同，设计参数：$\eta = 0.3$，$A_0 = 1\ \text{cm}^2$，$A_{\min} = 2\ \text{cm}^2$，$A_{\max} = 5.6\ \text{cm}^2$，$A_b = 3\ \text{cm}^2$，$\varepsilon = 0.001$，$N = 100$。

3.2 优化设计结果

目标函数的迭代曲线如图 17 所示，由于载荷和约束的对称性，两侧桁架分布具有对称性，图 18 为扶梯桁架一个侧面的桁架分布形态。优化结果显示，扶梯桁架上部保留斜杆以承受扶梯及其他部件的重量；在中部，保留了横杆部分，并通过三角形布局来应对变形，使重量分布均匀；下部同样保留了横杆，并形成了交叉结构，以增强抗变形能力。

3.3 工程化及结果验证

扶梯桁架型材所受载荷形式主要为弯曲载荷和拉压载荷，型材工程化选用角钢。基于 GB/T 706—2016，根据截面惯性矩选取相近的热轧角钢，工程化后的结果如图 19 所示。

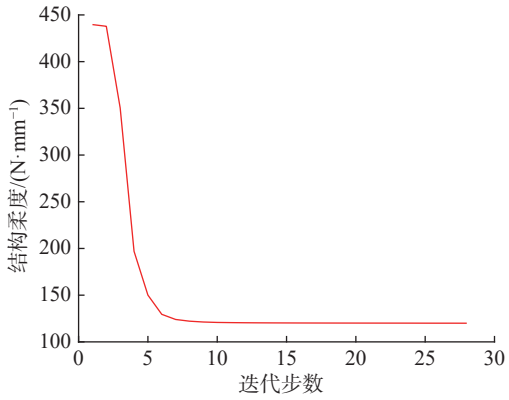


图 17 扶梯桁架目标函数优化迭代曲线

Fig.17 Optimized iteration curve of escalator truss objective function

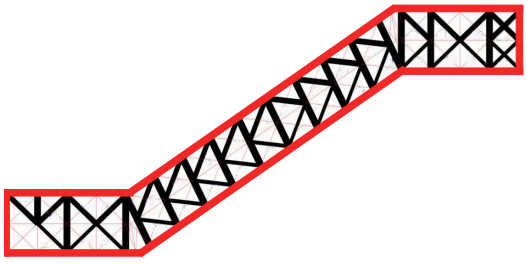
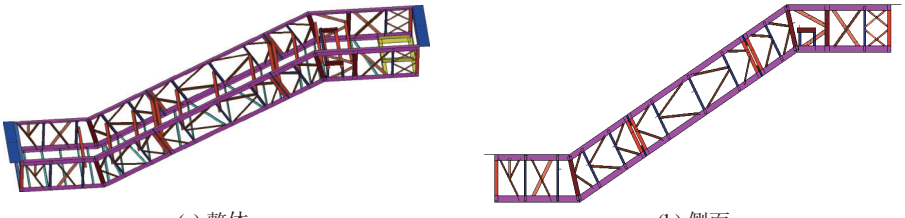


图 18 优化结果

Fig.18 Optimized result

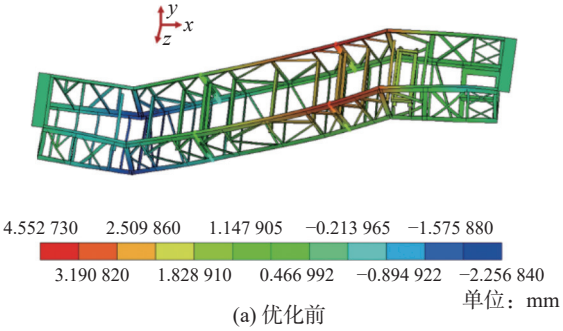
对工程化后扶梯桁架进行静力学分析，对比优化前分析结果，如图 20 所示。



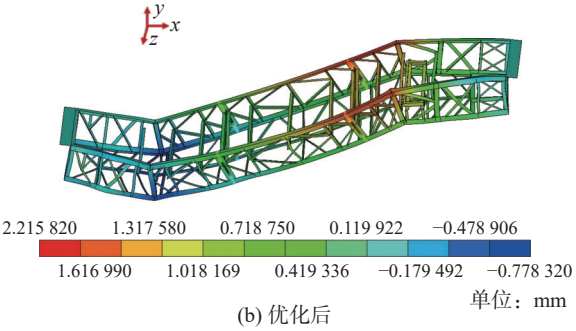
(a) 整体　　(b) 侧面

图 19 工程化后的扶梯桁架

Fig.19 Engineered escalator truss



(a) 优化前



(b) 优化后

图 20 扶梯桁架 *Z* 向位移云图

Fig.20 Displacement cloud image of *Z*-direction escalator truss

从图 20(a) 可以看出，优化前扶梯桁架整体结构在 Z 向产生了不均匀的位移，使得扶梯桁架产生了扭转现象，此扭转现象可用相对转角来衡量。其中，相对转角定义为扶梯梯路中轴线的偏转角度。优化前最大 Z 向位移为 4.55 mm，相对转角为 6.7°。优化后的扶梯桁架位移如图 20(b) 所示，最大 Z 向位移为 2.22 mm，降低了 51.21%，满足了 GB 16899—2011 中关于此款扶梯 Z 向位移需要小于 3.60 mm 的要求。相对转角为 4.60°，降低了 31.34%，对比结果如表 1 所示。同时，相比优化前的扶梯质量，从 1.78 t 降低到 1.70 t，减轻了 4.49%，实现了高刚轻质的设计。

表 1　优化前后力学性能及重量对比

Tab.1　Comparison table of static analysis results before and after optimization

评价指标	优化前	优化后	降低/%
最大侧向位移/mm	4.55	2.22	51.21
相对转角/(°)	6.70	4.60	31.34
重量/t	1.78	1.70	4.49

4　结　论

本文基于植物分支系统生长机理，提出一种直接获得空间桁架布局及截面尺寸信息的优化方法，通过典型空间桁架设计算例对设计方法进行了验证，并采用所提方法对自动扶梯桁架进行了工程实践。该方法不受基结构密度影响，可为复杂空间桁架结构高刚轻质设计提供高效的优化工具。未来的研究工作可进一步扩展该算法至多种材料、非线性工况等更加复杂的实际应用场景，并结合智能优化算法以提高求解效率。对于细长型的桁架结构，稳定性也是必需满足的因素，目前本研究只考虑了桁架结构的强度、刚度和轻量化问题，后续研究将引入稳定性约束，以提升工程适用性。

参考文献：

[1] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures, 1993, 49(5): 885−896.

[2] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197−224.

[3] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69(9/10): 635−654.

[4] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 489−528.

[5] 才琪, 冯若强. 基于改进双向渐进结构优化法的桁架结构拓扑优化 [J]. 建筑结构学报, 2022, 43(4): 68−76.

[6] KIM M J, JANG G W, KIM Y Y. Application of a ground beam-joint topology optimization method for multi-piece frame structure design[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(8): 081401.

[7] OHSAKI M, KATOH N, KINOSHITA T, et al. Enumeration of optimal pin-jointed bistable compliant mechanisms with non-crossing members[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 37(6): 645−651.

[8] 付志方, 王春洁. 节点位置不确定下桁架结构稳健拓扑优化 [J]. 机械工程学报, 2017, 53(2): 135−142.

[9] 丁晓红, 林建中, 山崎光悦. 利用植物根系形态形成机理的加筋薄壳结构拓扑优化设计 [J]. 机械工程学报, 2008, 44(4): 201−205.

[10] DONG X H, DING X H, XIONG M. Optimal layout of internal stiffeners for three-dimensional box structures based on natural branching phenomena[J]. Engineering Optimization, 2019, 51(4): 590−607.

[11] ZHANG H, DING X H, DONG X H, et al. Optimal topology design of internal stiffeners for machine pedestal structures using biological branching phenomena[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57(6): 2323−2338.

[12] 魏啸, 丁晓红. 传热结构自适应拓扑优化准则法研究 [J]. 机械工程学报, 2017, 53(20): 153−160.

[13] 华敏, 丁晓红, 吴春平. 基于 MMA 算法的桁架结构自适应成长技术 [J]. 机械强度, 2019, 41(5): 1105−1111.

[14] WELDEYESUS A G, GONDZIO J, HE L W, et al. Truss geometry and topology optimization with global stability constraints[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(4): 1721−1737.

（编辑：丁红艺）