

三维负泊松比超材料拓扑优化设计

胡天男¹, 郭鸿鹄²

(1. 京都大学 机械理工学院, 京都 615-8530; 2. 早稻田大学 理工学院, 京都 169-8555)

摘要: 负泊松比超材料因其在受拉时横向膨胀、受压时横向收缩的反常力学行为, 在航空航天、生物医疗和柔性电子等领域具有重要应用潜力。然而, 现有研究多集中于二维或三维各向同性设计, 难以满足实际工程中对材料方向相关性的需求。本文提出一种基于密度法的三维正交各向异性负泊松比超材料拓扑优化设计方法, 通过构建新的多目标优化函数, 结合均质化理论, 实现单胞结构在 3 个正交方向上的负泊松比性能。首先, 基于 SIMP (solid isotropic material with penalization) 材料插值模型, 引入几何约束条件, 在确保优化单胞对称性的同时有效减少计算规模; 其次, 通过惩罚函数建立了新的目标函数及优化模型; 最后, 利用周期性边界条件下的有限元均质化方法, 计算等效力学性能, 并通过灵敏度分析驱动设计变量更新。数值算例表明, 优化后的单胞在 3 个主方向上均实现了负泊松比性能。本研究为三维正交各向异性拉胀超材料的可控制备提供了理论依据, 扩展了机械超材料的设计和应用范围。

关键词: 拓扑优化; 负泊松比; 超材料; 均匀化法; 密度法

中图分类号: TH 122 **文献标志码:** A

Topology optimization for 3D metamaterials with negative Poisson's ratio

HU Tiannan¹, GUO Honghu²

(1. Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University, Kyoto 615-8530, Japan; 2. Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Kyoto 169-8555, Japan)

Abstract: Negative Poisson's ratio metamaterials have significant application potential in aerospace, biomedical engineering, and flexible electronics due to their anomalous mechanical behavior of expanding laterally under tension and contracting laterally under compression. However, existing research predominantly focuses on 2D or 3D isotropic designs, which struggle to meet practical engineering demands for direction-dependent material properties. This paper proposed a density-based

收稿日期: 2025-04-21

第一作者: 胡天男 (1996—), 男, 博士研究生。研究方向: 结构优化设计。E-mail: tiannanhu77@gmail.com

通信作者: 郭鸿鹄 (1993—), 男, 特别研究员。研究方向: 结构优化设计。E-mail: guohonghu@fuji.waseda.jp

引文格式: 胡天男, 郭鸿鹄. 三维负泊松比超材料拓扑优化设计[J]. 上海理工大学学报, 2025, 47(3): 262-268.

Citation: HU Tiannan, GUO Honghu. Topology optimization for 3D metamaterials with negative Poisson's ratio[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2025, 47(3): 262-268.

topology optimization method for designing 3D orthotropic negative Poisson's ratio metamaterials. By constructing a novel multi-objective optimization function combined with homogenization theory, negative Poisson's ratio characteristics in three orthogonal directions for unit cell structures was achieved. First, based on the SIMP (solid isotropic material with penalization) material interpolation model, geometric constraints were introduced to ensure unit cell symmetry while effectively reducing computational scale. Second, a new objective function and optimization model were established through penalty functions. Finally, the equivalent mechanical properties were calculated using finite element homogenization under periodic boundary conditions, with design variables updated through sensitivity analysis. Numerical examples demonstrate that the optimized unit cells exhibit negative Poisson's ratio behavior in all three principal directions. This study provides a theoretical foundation for the controllable fabrication of 3D orthotropic auxetic metamaterials and expands the design and application scope of mechanical metamaterials.

Keywords: *topology optimization; negative Poisson's ratio; metamaterial; homogenization method; density method*

负泊松比材料作为一种力学超材料,因其在单轴载荷下呈现反常的横向变形行为(拉伸时横向膨胀,压缩时横向收缩),近年来在航空航天、生物医学、防护装备及智能传感器等领域展现出广阔的应用前景^[1]。与传统材料相比,负泊松比材料在抗剪切性、抗断裂性和能量吸收率等方面更有优势^[2]。然而,现有研究多集中于二维结构或基于经验设计的周期性胞元,三维负泊松比超材料的设计仍面临几何自由度受限、力学性能可调性不足及制造成本高昂等挑战^[3]。针对这些问题,提出结合拓扑优化方法与均匀化理论,系统研究三维负泊松比超材料的优化设计方法,旨在突破传统设计框架,实现高性能、可定制化的负泊松比超材料结构设计。

拓扑优化作为一种基于数学模型的材料分布优化方法,能够通过目标函数与约束条件的灵活配置,高效探索材料与结构的最优构型^[4]。均匀化法通过表征微观结构与宏观等效性能的关系,为超材料的多尺度设计提供了理论框架。Sigmund等^[5]系统总结了拓扑优化在多物理场超材料设计中的应用,指出其在实现负泊松比、负热膨胀等多功能耦合方面的潜力。Anaya-Jaimes等^[6]提出了基于双向渐进结构优化的无约束设计框架,结合邻近材料相间插值、灵敏度稳定化策略及动态添加比率调控,实现了二维正交各向异性超材料的热膨胀系数精准定制。Murai等^[7]运用拓扑优化技术实现了可捕捉局部共振效应,并精准调控多频电磁波行为的超材料设计。Paulino等^[8]构建了针对功

能梯度材料的多尺度架构设计框架,并在一维、二维梯度及极端性能(近零剪切模量、负泊松比)材料中验证了方法的普适性与有效性。Ha等^[9]提出了一种基于手性负泊松比晶格(内凹六边形或手性三角形结构)的材料设计方法,通过采用两种具有不同热膨胀系数的材料,构建双材料梁单元,在宏观尺度上实现了对材料整体热膨胀系数的主动调控。Ai等^[10]基于参数化水平集方法和紧支径向基函数无网格方法,提出了一种二维微结构机械超材料拓扑优化设计机制,实现了负泊松比拉胀超材料设计,并可扩展至设计具有负热膨胀系数或频率带隙的超材料。Qin等^[11]以最大化初始机械阻抗水平为目标,提出了一种用于提升减振性能的超材料拓扑优化设计方法。Ye等^[12]设计了一种自适应渐进变硬机械超材料,克服了传统均匀负泊松比材料常存在的刚度突变或应力局限性,为开发具有定制化非线性力学响应的超材料提供了设计理论与方法。Jebellat等^[13]研究提出了一种由智能材料构成的超结构设计,该结构不仅具有形状记忆效应,还具备负泊松比性能,可应用于新型传感器、执行器及生物医学领域。Agrawal等^[14]基于密度法,提出了一种鲁棒拓扑优化(robust topology optimization, RTO)设计方法,以应对材料不确定性对负泊松比超材料性能的影响。

虽然运用拓扑优化实现负泊松比结构设计已十分成熟,三维负泊松比超材料的优化设计研究却相对较少,限制了超材料的工程应用。Evans等^[15]提出了三维正交内凹蜂窝负泊松比结构。基于拉-

扭耦合效应，Duan 等^[16]提出了一种新型三维负泊松比材料设计方法，通过将多层二维负泊松比材料与三维手性链结构耦合连接，构建出兼具负泊松比和正泊松比性能的三维材料体系。然而，这些三维超材料设计都并非基于拓扑优化设计，难以通过合理的材料分布实现最优的机械性能。Clausen 等^[17]运用几何非线性拓扑优化技术，首次实现了泊松比在 $-0.8\sim 0.8$ 范围内可编程调控的三维超材料设计，并通过参数化超级椭圆结构优化与多喷嘴连续打印策略，解决了传统拓扑优化超材料结构难以规模化制造的难题。Zhang 等^[18]利用 GPU 并行计算优化设计了高分辨率的三维负泊松比微结构。Vogiatzis 等^[19]采用调和水平集方法实现了多材料负泊松比超材料的优化设计，显著提升了结构的刚度与能量吸收性能。虽然基于拓扑优化的三维负泊松比超材料设计已逐渐获得关注，如何便捷有效地实现三维正交异性负泊松比性能仍然需要进一步研究。

针对上述挑战，本文提出一种基于拓扑优化与均匀化理论的三维负泊松比超材料设计方法。首先，通过密度法构建参数化设计空间，结合均匀化理论计算等效力学性能；其次，引入调节因子调控结构的负泊松比行为，实现拉压载荷下力学响应的对称性优化；最后，通过光固化 (stereolithography, SLA) 技术验证设计方案的可行性。本文的创新点包括：a. 提出了一种兼顾几何自由度与计算效率的三维拓扑优化框架；b. 构建了新的三维负泊松比拓扑优化目标函数；c. 通过增材制造验证了优化结构的可制造性。研究结果将为高性能负泊松比超材料的定制化设计提供理论支撑与技术路径。

1 三维负泊松比超材料拓扑优化设计方法

1.1 均匀化法

利用均匀化法计算超材料单胞的等效弹性矩阵，通过施加周期性边界条件对微结构单胞进行有限元分析，结构平衡方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{f} \tag{1}$$

式中： $\mathbf{K}$ 为单胞的整体刚度矩阵； $\mathbf{U}$ 为单胞的位移场； $\mathbf{f}$ 为由均匀应变场引起的外力，可以表示为

$$\mathbf{f}=\sum_{e=1}^m\mathbf{f}_e=\sum_{e=1}^m\int_{Y_e}\mathbf{B}^T\mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}Y \tag{2}$$

式中： $\mathbf{B}$ 为应变-位移矩阵； Y 为单胞； Y_e 为单胞中第 e 个单元的体积； $\mathbf{D}_e$ 为单元 e 的弹性矩阵； m 为单元总个数。针对三维问题，应变 $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]$ ， $\varepsilon_1=[1,0,0,0,0,0]^T$ ， $\varepsilon_2=[0,1,0,0,0,0]^T$ ， $\varepsilon_3=[0,0,1,0,0,0]^T$ ， $\varepsilon_4=[0,0,0,1,0,0]^T$ ， $\varepsilon_5=[0,0,0,0,1,0]^T$ ， $\varepsilon_6=[0,0,0,0,0,1]^T$ 。

得到位移场后，利用均匀化法，超材料的等效弹性矩阵 $\mathbf{D}^H$ 可以表示为

$$\mathbf{D}^H=\frac{1}{|Y|}\sum_{e=1}^m\int_{Y_e}(\mathbf{u}_e^0-\mathbf{U}_e)\mathbf{k}_e(\mathbf{u}_e^0-\mathbf{U}_e)\mathrm{d}Y_e \tag{3}$$

式中： $|Y|$ 为单胞的总体积； $\mathbf{u}_e^0$ 为通过施加单位应变计算得到的节点位移场； $\mathbf{U}_e$ 为通过施加全局单位应变计算得到的位移场^[20]； $\mathbf{k}_e$ 为单元刚度矩阵。

$$\mathbf{k}_e\mathbf{u}_e^0=\mathbf{f}_e \tag{4}$$

矩阵 $\mathbf{D}^H$ 中的弹性张量 $\mathbf{D}_{rs}$ 可以表示为

$$\mathbf{D}_{rs}^H=\frac{1}{|Y|}\sum_{e=1}^m\int_{Y_e}(\mathbf{u}_e^{0(r)}-\mathbf{U}_e^{(r)})\mathbf{k}_e(\mathbf{u}_e^{0(s)}-\mathbf{U}_e^{(s)})\mathrm{d}Y_e \tag{5}$$

式中： r 对应应力分量， $r=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ； s 对应应变分量， $s=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。

最终，弹性矩阵 $\mathbf{D}^H$ 表示为矩阵形式可写为

$$\mathbf{D}^H=\begin{bmatrix} C_{1111}^H & C_{1122}^H & C_{1133}^H & & & \\ C_{2211}^H & C_{2222}^H & C_{2233}^H & & & \\ C_{3311}^H & C_{3322}^H & C_{3333}^H & & & \\ & C_{1212}^H & & & & \\ & & C_{2323}^H & & & \\ & & & C_{1313}^H & & \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中： C 为弹性系数。对于施加对称性约束后的三维正交各向异性材料而言， $C_{1122}^H=C_{2211}^H$ ， $C_{1133}^H=C_{3311}^H$ ， $C_{2233}^H=C_{3322}^H$ 。

通过对弹性矩阵中相关项的计算，可得到3个方向的泊松比的计算公式为

$$\begin{cases} \mu_{xy}=\frac{C_{1122}^H}{C_{1122}^H+C_{2222}^H} \\ \mu_{yz}=\frac{C_{2233}^H}{C_{2233}^H+C_{3333}^H} \\ \mu_{zx}=\frac{C_{3311}^H}{C_{3311}^H+C_{1111}^H} \end{cases} \tag{7}$$

1.2 优化数学模型

实现正交各向异性负泊松比超材料设计的关键是弹性矩阵中 C_{1122}^H 、 C_{1133}^H 和 C_{2233}^H 为负数，理论

上, 通过最小化 $C_{1122}^H + C_{1133}^H + C_{2233}^H$, 可实现负泊松比设计。因此, 负泊松比超材料设计的核心转变为如何通过迭代, 实现 C_{1122} 、 C_{1133} 和 C_{2233} 的最小化设计。为了改善迭代过程的收敛性, 基于文献 [14] 和 [21], 引入松弛项 $w\beta^l(C_{1111}^H + C_{2222}^H + C_{3333}^H)$, 构建新的目标函数。最终, 通过引入松弛函数构造的新目标函数为

$$F = C_{1122}^H + C_{1133}^H + C_{2233}^H - w\beta^l(C_{1111}^H + C_{2222}^H + C_{3333}^H) \quad (8)$$

式中: β 为常数, 取值范围为 $(0, 1)$; 指数 l 为迭代次数; w 为调节参数。

为了调节 3 个正交方向上的泊松比数值, 引入额外的 3 个调节参数 w_1 、 w_2 及 w_3 , 将式(8)修改为

$$F = C_{1122}^H + C_{1133}^H + C_{2233}^H - w\beta^l(w_1C_{1111}^H + w_2C_{2222}^H + w_3C_{3333}^H) \quad (9)$$

将固体材料体积设定为上限值, 其作为不等式约束, 具体上限值可根据实际应用需求进行灵活调整。因此, 最终的优化数学模型为

$$\begin{aligned} \min F &= C_{1122}^H + C_{1133}^H + C_{2233}^H - w\beta^l(w_1C_{1111}^H + w_2C_{2222}^H + w_3C_{3333}^H) \\ \text{s.t. } v(x) &\leq v_f v_0 \\ 0 < x_{\min} &\leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

式中: v 是实体材料的体积; v_f 是体积分数; v_0 是微结构的总体积; x 是设计变量; $x_{\min}$ 是为了避免数值不稳定现象设置的 1 个小的正值。体积分数约束定义了微观结构中材料的最大体积。基于 SIMP 法, 单元刚度矩阵 k_e 可以表示为

$$k_e = x_e^p(k_s - k_0) + k_0 \quad (11)$$

式中: k_s 为实体单元的刚度矩阵; k_0 为空材料单元对应的刚度矩阵; p 为惩罚因子。

此外, 为了保证最终设计结果的正交各向异性, 在 xy 、 yz 、 zx 面对单胞结构施加几何对称约束, 如图 1 所示。由于结构是对称的, 因此, 拓扑优化对应的独立设计变量为图 1 蓝色部分所示的单胞微结构 1/8 部分。对称约束的施加, 不仅保证了设计结果的正交性, 也减小了设计变量, 提高了计算效率。

1.3 并行计算

三维结构拓扑优化相较于二维结构, 其计算规模呈指数增加。为了实现三维负泊松比超材料的高分辨率设计, 采用开源并行框架对上述问题进行求解。使用开源软件 FreeFEM++ 对均匀化问

题进行离散, 采用 PETSc 并行求解线性方程组。并行求解算法逻辑如下: 首先, 使用图分割包, 如 METIS, 对网格进行分解, 并指派给 CPU 各核心; 随后, 由 FreeFEM 执行偏微分方程离散, 并将离散后的线性代数方程组传递给 PETSc 进行并行求解; 最后, 将分别求解得到的数据进行回传处理, 得到最终分析结果。本文所有数值算例均在 DELL 桌面级工作站 Precision 3660 上完成, 其主要配置如下: 中央处理器为 Intel i9 13900K, 基频为 3.0 GHz; 内存为 128 GB; 显卡为 NVIDIA GeForce RTX 4080。

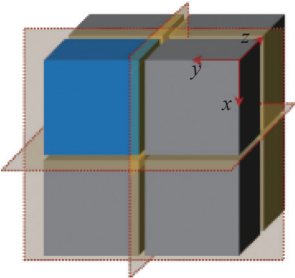


图 1 几何对称示意图

Fig.1 Schematic diagram of geometric symmetry constraint

1.4 优化算法及流程

优化算法的流程如图 2 所示。其中, 有限元离散和线性方程求解通过并行计算处理, 两者均基于 MPI(message passing interface)实现。

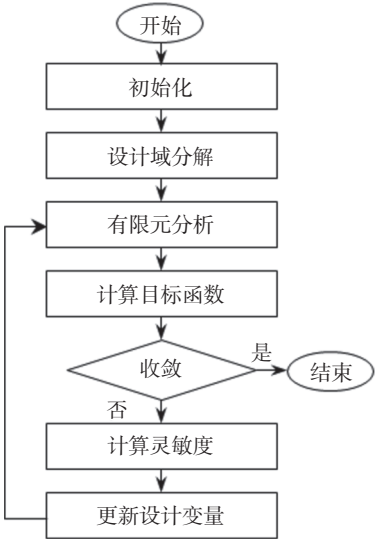


图 2 设计流程图

Fig.2 Design flowchart

优化算法的描述如下:

- 建立设计域和参数初始化。
- 对设计域进行离散, 并网格进行分解。
- 有限元法求解控制方程。
- 计算目标函数, 进行收敛判断。如果目标

函数收敛，则优化结束，否则跳转至步骤 e 进行迭代直至收敛。收敛条件：优化迭代的目标函数连续两次的差值小于收敛容差，或者迭代次数到达设定的最大值 N 。

- e. 计算灵敏度。
- f. 基于移动渐近线算法 (method of moving asymptotes, MMA) 更新设计变量，并跳转至步骤 c。

2 数值算例

2.1 算例设置与优化过程

为了验证所提设计方法的有效性，选取边长为 1 的三维单胞微结构作为设计域，采用结构化的四面体网格进行离散，单边网格数为 30，网格总数为 32.4×10^4 。为了实现结果的对称性，在单胞构型上施加三向对称面 (xy 、 yz 、 zx) 约束并构建网格，如图 3 所示。优化数学模型中的参数设定为：松弛因子 $\beta=0.8$ ，调节参数 $w=1000$ ， $w_1=3$ ， $w_2=1$ ， $w_3=4$ ，体积分数 $v_f=0.5$ 。材料属性为：弹性模量 $E_0=0.91$ ，泊松比 $\mu=0.3$ 。

迭代历程及优化结果如图 4 所示。在初始阶段，迭代步 $l<50$ 时，设计域内材料呈均匀分布，3 个正交方向的泊松比 μ_{xy} 、 μ_{yz} 和 μ_{zx} 相等，为材料

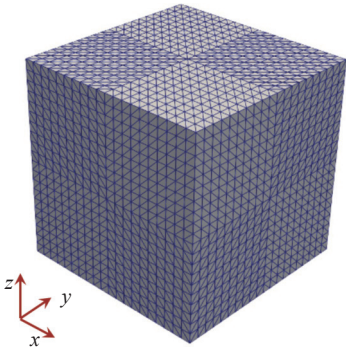


图 3 几何约束下单元构建示意图

Fig.3 Schematic diagram of unit construction under geometric constraint

本身的泊松比 0.3。随着迭代推进，迭代步 l 为 50~200 时，目标函数通过惩罚项动态调整弹性矩阵项 $C_{1111}^H+C_{2222}^H+C_{3333}^H$ ，驱动泊松比向负值演变。

如图 5 所示，至迭代步 $l=200$ 时， μ_{zx} 率先下降到 -0.5，表明 zx 方向上率先形成稳定的拉胀结构。最终，迭代步 $l>300$ 时，目标函数趋于稳定，3 个方向上的泊松比分别达到 $\mu_{xy}=-0.558$ ， $\mu_{yz}=-0.161$ ， $\mu_{zx}=-0.801$ ，实现三维正交各向异性负泊松比超材料结构逆向设计。可以看到，最终获得的 3 个方向的负泊松比数值间的比值关系基本满足设计要求 $w_1=3$ ， $w_2=1$ ， $w_3=4$ 。

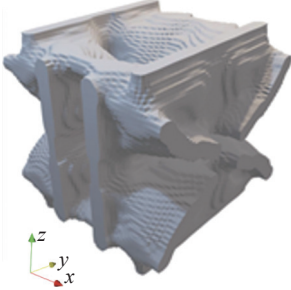
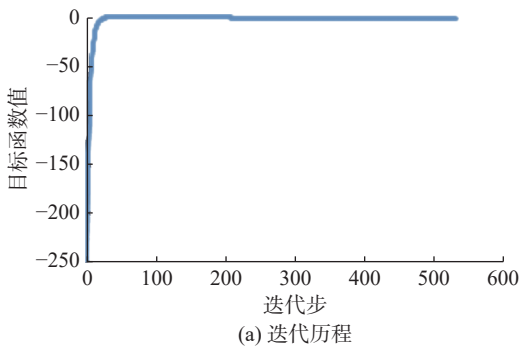


图 4 迭代历程及优化结果

Fig.4 Iteration process and optimization result

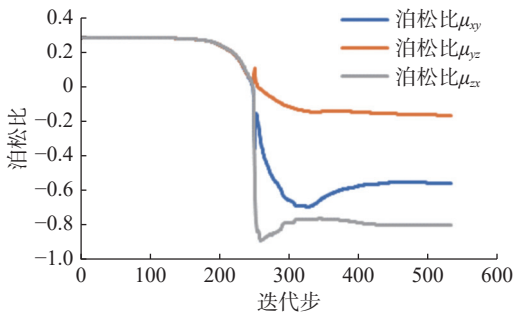


图 5 3 个方向上泊松比的迭代历程

Fig.5 Iteration process of Poisson's ratio in three directions

2.2 优化构型与力学机理

图 6 为优化后的单胞结构及其与经典二维手性超材料的对比。图 6(a)~(b) 所示的优化结果呈现出独特的空间螺旋拓扑结构： z 轴方向通过交叉肋条形成类似二维手性结构的扭转耦合效应，而 x 、 y 轴方向通过弧形空腔实现横向膨胀抑制。这种三维耦合机制使得单轴拉伸时，交叉肋条的弹性变形引发多向收缩响应。值得注意的是，优化结构的材料分布与二维手性超材料具有几何相似性，如图 6(c) 所示，验证了目标函数对负泊松比

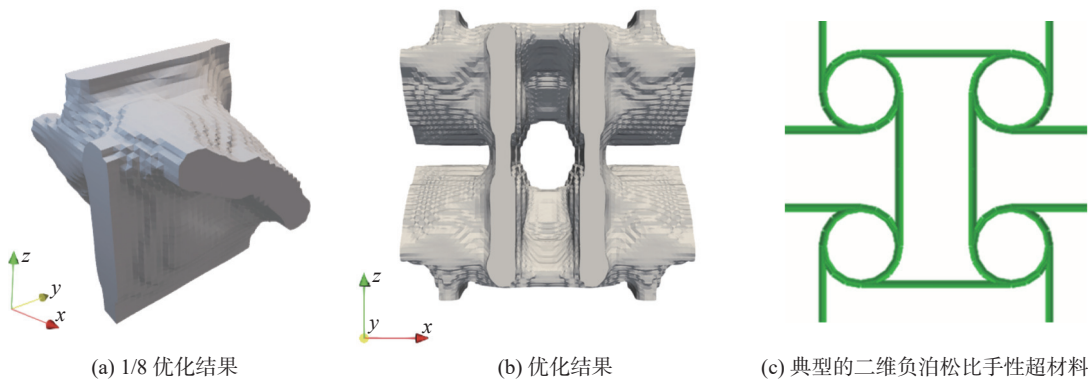


图 6 优化设计结果与典型二维负泊松比手性超材料结构对比

Fig.6 Comparison of optimization design results with a typical 2D negative Poisson's ratio chiral metamaterial

性能的捕捉能力。

由于优化是基于密度法进行的，从图 6(b) 可以看到，优化后的单胞有较为明显的锯齿形边界面，这一现象可以通过引入额外的技术来消除，如贴体网格技术。然而，考虑到单胞的几何尺寸，图 6(b) 所示的锯齿形边界面在实际制造中并不会变得明显，且对结构的性能影响较小，因此，在本文中不作额外的处理。

进一步将优化单胞进行 3×3 周期扩展，如图 7 所示，宏观等效泊松比呈现显著方向依赖性：沿主对角线方向($\mu_{zx}=-0.801$)的拉胀效应最强，而 yz 方向($\mu_{yz}=-0.161$)受对称约束影响较弱。这种各向异性可通过调整体积分数和几何约束进行定制，

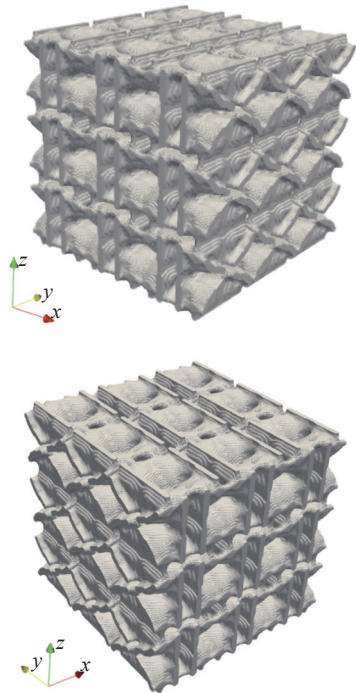


图 7 优化结果的 3×3 组装结构

Fig.7 3×3 assembly structure of the optimization result

为多轴载荷场景提供设计灵活性。

3 超材料增材制造

为了验证三维负泊松比超材料的可制造性，使用 3D 技术对设计结果进行增材制造。首先，将文中的优化结果导出为 STL 文件；然后，将 STL 文件导入切片软件以生成 G 代码；最后，将 G 代码导入 3D 打印机打印结构。3D 打印机的打印最高分辨率为 16 μm ，打印精度为：20~85 μm (尺寸小于 50 mm 零件)；200 μm (全尺寸模型，260 mm 零件)，成型材料为光敏树脂。3D 打印的结果如图 8 所示。从图中可以看出，打印的结构具有很高的分辨率，与优化结果基本一致，验证了优化结果的可制造性。

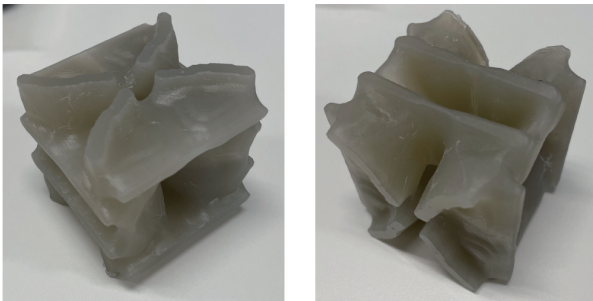


图 8 增材制造的负泊松比超材料样件

Fig.8 Specimens of negative Poisson's ratio metamaterials fabricated via additive manufacturing

4 结 论

本文提出了一种基于密度法的三维正交各向异性负泊松比超材料并行拓扑优化框架，通过理论推导、数值仿真与增材制造验证，得出以下结论：

a. 通过融合几何对称约束与动态惩罚函数，

成功实现了三维单胞在3个正交方向的负泊松比各向异性调控($\mu_{xy}=-0.558$, $\mu_{yz}=-0.161$, $\mu_{zx}=-0.801$)。优化结构呈现空间螺旋拓扑,其力学行为与二维手性超材料具有机理一致性,验证了目标函数的物理合理性。

b. 采用 PETSc 并行求解器与 MPI 任务分配策略,有效缩短了计算时间,相较传统串行算法效率提升8倍,为高分辨率设计提供技术支撑。

c. 增材制造样件证实了优化结构的可制造性,其多向拉胀特性可应用于定制化缓冲材料、柔性传感器及航空航天轻量化结构。通过调节体积分数与对称约束,可进一步扩展至负热膨胀、能量吸收等多功能耦合设计。

未来工作将聚焦于非线性大变形超材料拓扑优化算法开发,并探索金属基超材料的SLA成形工艺,以提升结构的承载能力与耐久性。

参考文献:

- [1] LAKES R. Foam structures with a negative Poisson's ratio[J]. *Science*, 1987, 235(4792): 1038–1040.
- [2] REN X, DAS R, TRAN P, et al. Auxetic metamaterials and structures: a review[J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, 27(2): 023001.
- [3] 杨智春, 邓庆田. 负泊松比材料与结构的力学性能研究及应用[J]. *力学进展*, 2011, 41(3): 335–350.
- [4] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197–224.
- [5] SIGMUND O, MAUTE K. Topology optimization approaches: a comparative review[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(6): 1031–1055.
- [6] ANAYA-JAIMES L M, VICENTE W M, PAVANELLO R. Metamaterials design with a desired thermal expansion using a multi-material BESO method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(12): 355.
- [7] MURAI N, NOGUCHI Y, MATSUSHIMA K, et al. Multiscale topology optimization of electromagnetic metamaterials using a high-contrast homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 403: 115728.
- [8] PAULINO G H, SILVA E C N, LE C H. Optimal design of periodic functionally graded composites with prescribed properties[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 38(5): 469–489.
- [9] HA C S, HESTEKIN E, LI J H, et al. Controllable thermal expansion of large magnitude in chiral negative Poisson's

ratio lattices[J]. *Physica Status Solidi (B)*, 2015, 252(7): 1431–1434.

- [10] AI L, GAO X L. Topology optimization of 2-D mechanical metamaterials using a parametric level set method combined with a meshfree algorithm[J]. *Composite Structures*, 2019, 229: 111318.
- [11] QIN H X, YANG D Q. Vibration reduction design method of metamaterials with negative Poisson's ratio[J]. *Journal of Materials Science*, 2019, 54(22): 14038–14054.
- [12] YE M L, GAO L, LI H. A design framework for gradually stiffer mechanical metamaterial induced by negative Poisson's ratio property[J]. *Materials & Design*, 2020, 192: 108751.
- [13] JEBELLAT E, BANIASSADI M, MOSHKI A, et al. Numerical investigation of smart auxetic three-dimensional meta-structures based on shape memory polymers via topology optimization[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2020, 31(15): 1838–1852.
- [14] AGRAWAL G, GUPTA A, CHOWDHURY R, et al. Robust topology optimization of negative Poisson's ratio metamaterials under material uncertainty[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2022, 198: 103649.
- [15] EVANS K E, NKANSAH M A, HUTCHINSON I J. Auxetic foams: modelling negative Poisson's ratios[J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, 42(4): 1289–1294.
- [16] DUAN S Y, XI L, WEN W B, et al. A novel design method for 3D positive and negative Poisson's ratio material based on tension-twist coupling effects[J]. *Composite Structures*, 2020, 236: 111899.
- [17] CLAUSEN A, WANG F W, JENSEN J S, et al. Topology optimized architectures with programmable Poisson's ratio over large deformations[J]. *Advanced Materials*, 2015, 27(37): 5523–5527.
- [18] ZHANG D, ZHAI X Y, LIU L G, et al. An optimized, easy-to-use, open-source GPU solver for large-scale inverse homogenization problems[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, 66(9): 207.
- [19] VOGIATZIS P, CHEN S K, WANG X, et al. Topology optimization of multi-material negative Poisson's ratio metamaterials using a reconciled level set method[J]. *Computer-Aided Design*, 2017, 83: 15–32.
- [20] ZHANG H, DING X H, WANG Q, et al. Topology optimization of composite material with high broadband damping[J]. *Computers & Structures*, 2020, 239: 106331.
- [21] ZHANG H K, LUO Y J, KANG Z. Bi-material microstructural design of chiral auxetic metamaterials using topology optimization[J]. *Composite Structures*, 2018, 195: 232–248.