文章编号:1007－6735(2026)05－0637－08　DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.20251110001

基于截断奇异值分解的虚拟域谱方法的应用研究

李　珊，　杨天愉，　孙　晨
（上海理工大学 基础学部，上海 200093）

摘要： 不规则区域非线性微分方程的数值求解面临区域几何复杂、离散系统易出现病态的难题。为解决此问题，提出了融合虚拟域法与截断奇异值分解(TSVD)的谱方法。通过极坐标变换与傅里叶展开，将二维偏微分方程解耦为一组独立的一维径向常微分方程；采用 Legendre–Galerkin 谱方法离散方程，结合最小二乘法施加人工边界条件；引入 TSVD 处理最小二乘系统的病态性，抑制小奇异值导致的数值不稳定。数值实验表明，该方法在保持高精度的同时，显著提升了计算稳定性与鲁棒性，为不规则区域非线性微分方程的高效求解提供了新路径。

关键词： 虚拟域谱方法；最小二乘法；截断奇异值分解；不规则区域非线性微分方程
中图分类号： O 242　　**文献标志码：** A

Application research of a fictitious domain spectral method combined with truncated singular value decomposition

Li Shan,　Yang Tianyu,　Sun Chen
(*Faculty of Basic Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The numerical solution of nonlinear differential equations in irregular domains faces major challenges due to geometric complexity and the susceptibility of discrete systems to ill-conditioning. To address this issue, the fictitious domain spectral method combining truncated singular value decomposition (TSVD) was proposed. By employing a polar coordinate transformation and Fourier expansion, the two-dimensional PDE was decomposed into a collection of independent one-dimensional radial ODEs. The Legendre-Galerkin spectral method was then applied for spatial discretization, and artificial boundary conditions were imposed using a least-squares formulation. To mitigate the ill-conditioning of the least-squares system, TSVD was introduced to suppress numerical instabilities caused by small singular values. Numerical experiments demonstrate that the proposed method maintains high accuracy while significantly enhancing computational stability and robustness, offering

收稿日期: 2025−11−10
基金项目: 上海市自然科学基金资助项目(25ZR1402382)
通信作者: 李　珊(1985—)，女，副教授．研究方向：计算数学．E-mail：shanliusst@126.com

引文格式: 李珊，杨天愉，孙晨．基于截断奇异值分解的虚拟域谱方法的应用研究[J]．上海理工大学学报，2026，48(5)：637-644.
Citation: Li Shan, Yang Tianyu, Sun Chen. Application research of a fictitious domain spectral method combined with truncated singular value decomposition[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2026, 48(5): 637-644.

an effective framework for the efficient solution of nonlinear differential equations on irregular domains.

Keywords: *a fictitious domain spectral method*; *least-squares method*; *truncated singular value decomposition*; *nonlinear differential equations on irregular domains*

不规则区域上非线性微分方程的数值求解是计算数学领域的核心问题之一[1]，广泛应用于流体力学、电磁学和结构力学等领域[2]。例如，凹角通道内的流动可通过非线性 Navier-Stokes 方程描述[3]，材料的非线性变形则依赖非线性弹性力学方程建模[4]。由于解析解往往难以获取，数值方法成为主要求解途径。

传统数值方法中，有限差分法受网格拓扑限制，在复杂边界上精度易受损；有限元法虽能处理不规则几何，但高阶单元构造代价较高。相比之下，谱方法以其“指数级收敛”特性[5]，在规则区域求解中表现突出。其中，Legendre–Galerkin 谱方法[6]因正交基的优良性质而广受应用。然而，谱方法对区域正则性要求严苛，直接应用于不规则区域时，边界条件的高精度施加成为制约其精度与稳定性的关键瓶颈，如何在保持谱精度的同时克服几何复杂性，已成为该方法发展的关键研究方向。

为突破几何复杂性限制，虚拟域法通过将不规则区域嵌入规则计算域，为谱方法在复杂区域的拓展应用提供了有效途径。Babuška 等[7]首次将虚拟域法与有限元结合，通过 Lagrange 乘子施加边界条件，奠定了该类方法的理论基础。Gu 等[8]在虚拟域与谱方法融合领域开展了系统性研究，其提出的虚拟域嵌入与高效算法结合的技术路线，为复杂几何域椭圆型方程求解提供了高精度方案。Yao 等[9]则通过坐标变换技术，将复杂区域映射为正则域，结合谱方法实现了三维弯曲几何与外部区域问题的高效求解。在已有虚拟域与谱方法的融合研究中[10]，最小二乘施加人工边界条件时，易因采样点过密导致矩阵病态，小奇异值放大会引发数值振荡，影响计算稳定性，在非线性问题中尤为明显。

为改善系统矩阵性态并提升计算稳定性，可引入正则化技术。Tikhonov 正则化[11]通过增加 penalty 项抑制病态性，但参数选取依赖经验，易导致过度平滑或欠正则化。截断奇异值分解（truncated singular value decomposition, TSVD）[12]则通过筛选有效奇异值直接抑制不适定性。基于此，本文提出了一种融合虚拟域法、Legendre–Galerkin 谱方法与 TSVD 技术的数值求解方法：通过极坐标变换与傅里叶展开实现问题降维，采用最小二乘法施加边界条件，引入 TSVD 处理系统病态性。同时，数值实验验证了该方法的高精度与高稳定性。

1 预备知识

首先，给出后续讨论中将使用的若干基本记号与定义。定义在任意区间$[a,b]$上的雅可比权函数为$\hat{\omega}_{\alpha,\beta}(r)=(1-r)^{\alpha}r^{\beta}$，$0<r<1$，加权$L^2$内积为$(u,v)_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\int_0^1 u(r)\overline{v(r)}\hat{\omega}_{\alpha,\beta}(r)\mathrm{d}r$。同时，定义相应的加权$L^2$与$H^1$空间分别为$L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\{u(r):\int_0^1|u(r)|^2\hat{\omega}_{\alpha,\beta}(r)\mathrm{d}r<\infty\}$、$H^1_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\{u(r):u,\partial_r u\in L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}\}$，配备相应的范数$\|u\|_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\left(\int_0^1|u(r)|^2\hat{\omega}_{\alpha,\beta}(r)\mathrm{d}r\right)^{1/2}$、$\|u\|_{1,\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\left(\|u\|^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}+\|\partial_r u\|^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}\right)^{1/2}$。特别地，记$(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_{\hat{\omega}_{0,0}}$，且$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{\hat{\omega}_{0,0}}$。

设$\Pi:=(0,1)\times(0,2\pi)$，引入空间$H^{1,s}_p(\Pi)$，其中$s\geqslant 0$，该空间包含定义在Π上关于变量θ具有2π周期性的函数，其范数定义为$\|u\|_{H^{1,s}_p(\Pi)}=\left(\sum_{|m|=0}^{\infty}m^{2s}\left(m^2\|u^m\|^2_{\hat{\omega}_{0,-1}}+\|\partial_r u^m\|^2_{\hat{\omega}_{0,1}}\right)\right)^{1/2}$。假设$u$关于角变量可展开为$u(r,\theta)=\sum_{|m|=0}^{\infty}u^m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$。更精确地讲，当且仅当$\sum_{|m|=0}^{\infty}m^{2s}(m^2\|u^m\|^2_{\hat{\omega}_{0,-1}}+\|\partial_r u^m\|^2_{\hat{\omega}_{0,1}})<\infty$，且$u^m(r)\in H^1_{\hat{\omega}_{0,1}}\cap L^2_{\hat{\omega}_{0,-1}}$时，$u(r,\theta)\in H^{1,s}_p(\Pi)$。

2 虚拟域谱方法

2.1 问题表述

考虑以下泊松方程：

$$\begin{cases}\alpha V(x,y)-\beta\Delta V(x,y)=F(x,y),&(x,y)\in\Omega\\ V(x,y)=G(x,y),&(x,y)\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\alpha \geqslant 0$，$\beta > 0$；Ω为二维单连通光滑区域；$F \in C(\overline{\Omega})$，$G \in C(\partial\Omega)$。

设$\widetilde{\Omega}$为一个包含Ω的圆形区域，即$\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}$，并假定$F$可以从$\Omega$平滑扩展到$\widetilde{\Omega}$。于是，若$U$在$\widetilde{\Omega}$上解如下的扩展问题：

$$\begin{cases} \alpha U(x,y) - \beta \Delta U(x,y) = F(x,y), & (x,y) \in \widetilde{\Omega} \\ U(x,y) = G(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

则有$U|_{\Omega} = V$。因此，问题 (1) 可以转为求解扩展问题 (2)。

2.2　极坐标变换

在不失一般性的情况下，假设$\widetilde{\Omega} = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$，即单位圆的内部。通过极坐标变换：$\mathbb{T}: \overline{\Pi} \to \overline{\widetilde{\Omega}}$，$\mathbb{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$，应用于式 (2)，记作：

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &:= U(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ f(r,\theta) &:= F(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ g(r,\theta) &:= G(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

在极坐标下，二阶偏导数的表达式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta u_{rr} - \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r} u_{r\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{r} u_r + \\ \qquad \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} u_{\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{r^2} u_{\theta\theta} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta u_{rr} + \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r} u_{r\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{r} u_r - \\ \qquad \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} u_{\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{r^2} u_{\theta\theta} \end{cases} \tag{3}$$

将式 (3) 代入式 (2)，则可以得到：

$$\begin{cases} u_{\theta}(0,\theta) = 0, \ u\text{在}\theta\text{方向为}2\pi\text{周期} \\ \alpha u - \dfrac{\beta}{r}(r u_r)_r - \dfrac{\beta}{r^2} u_{\theta\theta} = f, & (r,\theta) \in \Pi \\ u = g, & (r,\theta) \in \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

式中，$\Gamma = \mathbb{T}^{-1}(\partial\Omega)$是边界$\partial\Omega$在变换$\mathbb{T}$下的原像。

2.3　傅里叶变换

接着在θ方向作傅里叶变换，将二维问题转化为一组一维问题。依据解的光滑性及误差衰减特性，选取截断参数$M > 0$，将原始的无穷级数系统约化为一个有限维近似。因此，将u与f展开为

$$u(r,\theta) = \sum_{|m|=0}^{M} u_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \quad f(r,\theta) = \sum_{|m|=0}^{M} f_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5}$$

将式 (5) 代入式 (4) 中，可得

$$\alpha \sum_{|m|=0}^{M} u_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} - \beta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{|m|=0}^{M} u_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\sum_{|m|=0}^{M} u_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \right) \right] = \sum_{|m|=0}^{M} f_m(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{6}$$

为保持原问题椭圆性的同时，降低计算复杂度，在方程 (6) 两边乘以$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}$并在区间$[0,2\pi)$上积分，实现变量分离，消除$\theta$依赖性。因此，该过程将二维偏微分方程解耦为一维径向常微分方程：

$$-\frac{\beta}{r} \partial_r (r \partial_r u_m) + \left(\frac{\beta m^2}{r^2} + \alpha \right) u_m = f_m(r), \ 0 < r < 1$$

且满足单侧极点条件：若$m \neq 0$时，$u_m(0) = 0$。由于$r = 1$时没有边界条件，方程组不确定。为得到关于u_m的适定问题，引入一个人工边界条件，使其定义良好，即

$$u_m(1) = t_m \tag{7}$$

式中，t_m有待确定，在给定t_m之后，$u_m(r)$可按式 (10) 显式表达。

定理 1　假设常微分方程$Lu(x) = f(x)$，$x \in (a,b)$，且带有边界条件$u(a) = 0$，$u(b) = t$，方程是良好定义的并且允许有唯一解$u(x;t)$。若$\phi(x)$是以下方程的解：$L\phi(x) = 0$，$x \in (a,b)$且$\phi(a) = 0$，$\phi(b) = 1$，$\psi(x)$是以下方程的解：$L\psi(x) = f(x)$，$x \in (a,b)$且$\psi(a) = 0$，$\psi(b) = 0$，那么可以得到$u(x;t) = t\phi(x) + \psi(x)$。

根据定理 1，令$\{\phi_m\}$为下列齐次问题的解：

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{r} \partial_r (r \partial_r \phi_m) + \left(\frac{\beta m^2}{r^2} + \alpha \right) \phi_m = 0, \ 0 < r < 1, \\ &\phi_m(0) = 0 (m \neq 0), \ \phi_m(1) = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

并令$\{\psi_m\}$为下列非齐次问题的解：

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{r} \partial_r (r \partial_r \psi_m) + \left(\frac{\beta m^2}{r^2} + \alpha \right) \psi_m = f_m, \ 0 < r < 1, \\ &\psi_m(0) = 0 (m \neq 0), \ \psi_m(1) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

因此，可以得到：

$$u_m(r;t_m) = t_m \phi_m(r) + \psi_m(r) \tag{10}$$

对于式 (8) 中的方程和边界条件，设$y(r) = \phi_m(r)$，则方程简化为

$$r^2 y'' + r y' - \left(m^2 + \frac{\alpha}{\beta} r^2 \right) y = 0 \tag{11}$$

这是一个修正贝塞尔方程，其解由第一类修正贝塞尔函数$I_{|m|}(r)$和第二类修正贝塞尔函数$K_{|m|}(r)$的线性组合构成，则该方程通解为$y(r) = AI_{|m|}(r) + BK_{|m|}(r)$。

由于$K_{|m|}(r)$在$r = 0$时发散，设$B = 0$以满足$\phi_m(0) = 0$的条件。当$\alpha \neq 0$时，$y(r) = AI_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta} r\right)$。使用边界条件$\phi_m(1) = 1$，可以得到$A = \dfrac{1}{I_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta}\right)}$，因此，最终解为$\phi_m(r) = \dfrac{I_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta} r\right)}{I_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta}\right)}$。

当$\alpha=0$时，式(11)可以简化为$r^2y''+ry'-m^2y=0$。因此，该方程的通解为$\phi_m(r)=Ar^{|m|}+Br^{-|m|}$。

同理，根据边界条件，当$A=1$、$B=0$时，通解满足该方程。即对于$\forall m$，式(8)的解具有如下表达：

$$\phi_m(r)=\begin{cases} r^{|m|}, & \alpha=0 \\ \dfrac{I_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta}r\right)}{I_{|m|}\left(\sqrt{\alpha/\beta}\right)}, & \alpha>0 \end{cases} \tag{12}$$

2.4 Legendre–Galerkin 谱方法

为解决二维问题(9)，定义如下的一维 Hilbert 空间：

$$\hat{W}^0=\left\{u(r):\ \int_0^1(|u|^2+|\partial_r u|^2)r\mathrm{d}r<\infty\right\}$$

$$\hat{W}^m=\left\{u(r):\ u(0)=0,\int_0^1\left(\frac{m^2}{r}|u|^2+r|\partial_r u|^2\right)\mathrm{d}r<\infty\right\},\quad m\neq 0,$$

$$\hat{Y}^m=\{u\in\hat{W}^m:\ u(1)=0\},\ \forall m$$

定义如下范数：

$$\|u\|_{\hat{W}^m}:=\begin{cases}(\|u\|^2_{\hat{\omega}_{0,1}}+\left\|\partial_r u\right\|^2_{\hat{\omega}_{0,1}})^{1/2}, & m=0\\ (m^2\|u\|^2_{\hat{\omega}_{0,-1}}+\left\|\partial_r u\right\|^2_{\hat{\omega}_{0,1}})^{1/2}, & m\neq 0\end{cases}$$

采用权函数$\hat{\omega}^{0,1}(r)=r$，由式(9)导出相应弱形式为：求$u_m\in\hat{W}$，使得对任意$v_m\in\hat{W}$都有

$$\int_0^1\left(-\frac{\beta}{r}\partial_r(r\partial_r u_m)+\left(\frac{\beta m^2}{r^2}+\alpha\right)u_m\right)v_m r\mathrm{d}r=\int_0^1 f_m v_m r\mathrm{d}r,\ r\in(0,1)$$

记$w(r):=ru_m'(r)$，则$-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u_m)r=-\partial_r(ru_m')=-w'(r)$。对$I_1$作一次分部积分：

$$I_1=-\beta[wv_m]_0^1+\beta\int_0^1 wv_m'\mathrm{d}r=\beta\int_0^1 ru_m'v_m'\mathrm{d}r$$

且势能项：$I_2=\int_0^1\frac{\beta m^2}{r^2}u_m v_m r\mathrm{d}r=\beta m^2\int_0^1\frac{1}{r}u_m v_m\mathrm{d}r$，$I_3=\int_0^1\alpha u_m v_m r\mathrm{d}r=\alpha\int_0^1 u_m v_m r\mathrm{d}r$

故对上式整理得：

$$\beta\int_0^1 u_m v_m r\mathrm{d}r+\beta m^2\int_0^1\frac{1}{r}u_m v_m\mathrm{d}r+\alpha\int_0^1 u_m v_m r\mathrm{d}r=\int_0^1 f_m v_m r\mathrm{d}r,\ r\in(0,1) \tag{13}$$

令P^N表示区间[0,1]上次数不超过N的多项式集合，通过采用 Legendre–Galerkin 近似，将实验函数与检验函数都限制在有限维空间$\hat{W}\cap P^N$，用带权内积$(a,b)_{\hat{\omega}_{\alpha,\beta}}=\int_0^1 ab\hat{\omega}_{\alpha,\beta}(r)\mathrm{d}r$来表示积分运算。同时，用 Legendre 插值算子I_N对源项离散。由此可把弱形式(13)改写为如下离散的内积形式：

$$\beta\left((u_m^N)',(v_m^N)'\right)_{\hat{\omega}_{0,1}}+\beta m^2(u_m^N,v_m^N)_{\hat{\omega}_{0,-1}}+\alpha(u_m^N,v_m^N)_{\hat{\omega}_{0,1}}=(I_N f_m,v_m^N)_{\hat{\omega}_{0,1}}$$

2.5 最小二乘法

给定矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$与观测向量$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$，最小二乘问题为求解$\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\phi(\boldsymbol{x}):=\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2$。当$m\geqslant n$且$\boldsymbol{A}$列满秩$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$时，有唯一解；当秩亏时，解集非空且包含无穷多解，其中范数最小解由伪逆给出。

接下来，需要解决式(7)提出的人工边界条件。在边界Γ上选取K个等距采样点$\{(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)\}_{k=1}^K$，并以$\{t_m\}_{|m|=0}^M$为自变量，使这些节点处的离散$L^2$误差最小，即求解如下最优化问题：$\min\limits_{\{t_m\}}\sum\limits_{k=1}^K|u_M(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)-g(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)|^2$，等价于$\min\limits_{\{t_m\}}\sum\limits_{k=1}^K\left|\sum\limits_{|m|=0}^M(t_m\phi^m(\hat{r}_k)+\psi^m(\hat{r}_k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\hat{\theta}_k}-g(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)\right|^2$。由傅里叶展开构造余弦项与正弦项，且当$m=0$时正弦项恒为0，仅保留余弦项，据此定义矩阵$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cdots & \cos(M\theta_1) & \sin\theta_1 & \cdots & \sin(M\theta_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_K & \cdots & \cos(M\theta_K) & \sin\theta_K & \cdots & \sin(M\theta_K)\end{bmatrix}$$

令$\boldsymbol{b}_k=g(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)-\psi(\hat{r}_k,\hat{\theta}_k)$，$\boldsymbol{t}=[t_0,t_1^{(c)},\cdots,t_M^{(c)},t_1^{(s)},\cdots,t_M^{(s)}]^{\mathrm{T}}$，根据式(12)构造矩阵：$\boldsymbol{G}=[b_0,b_1,\cdots,b_K]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}=[\phi_0,\phi_1^{(c)},\cdots,\phi_M^{(c)},\phi_1^{(s)},\cdots,\phi_M^{(s)}]^{\mathrm{T}}$。

由此得到系统$(\boldsymbol{PT})^{\mathrm{T}}t=(\boldsymbol{GT})^{\mathrm{T}}$，则相应的最小二乘问题为$\min\limits_{\boldsymbol{t}}\|(\boldsymbol{PT})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-(\boldsymbol{GT})^{\mathrm{T}}\|_2$。对于该最小二乘问题，可以通过一般的线性求解器进行求解。然而，由于相邻采样节点间距过近，系数矩阵的相邻行具有高度并行性，这会导致当K值增大时出现病态问题。为了缓解采样点过近导致的病态情况，本文采用 TSVD 进行处理。

3　奇异值分解

3.1　定义[13]

设$\boldsymbol{A}$是一个任意的$m\times n$矩阵 (不妨设$m\geqslant n$)，存在分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$。其中$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$是$m\times m$矩阵且满足$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$是$n\times n$矩阵且满足$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且$\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant 0$，$\boldsymbol{U}$的列$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$称为左奇异向量，$\boldsymbol{V}$的列$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$称为右奇异向量，$\sigma_i$称为奇异值。

当矩阵$\boldsymbol{A}$的部分奇异值σ_i极小，导致数值不稳定时，可采用 TSVD 进行近似，即仅保留前k个较大的奇异值及其对应的奇异向量$\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_k\boldsymbol{V}_k^{\mathrm{T}}$。其中，$\boldsymbol{\Sigma}_k=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)$。

TSVD 是在奇异值分解（SVD）的基础上，通过截断系统矩阵的小奇异值来降低系统矩阵的条件数，从而获得更高精度的解，该方法可有效抑制小奇异值对解的不稳定影响。

3.2　基本性质

定理 2　对于任意$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，若$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$，则存在酉矩阵$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$，使得$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。其中$\boldsymbol{\Sigma}_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，且$\sigma_i>0$，$i=1,\cdots,r$。

定理 3　设$\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>\sigma_{r+1}=\cdots=\sigma_n=0$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$r$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{j=1}^{r}\sigma_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$。其中$\boldsymbol{A}$的零空间为$N(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$，值域空间为$R(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$。矩阵$\boldsymbol{A}$的最佳秩$k(k\leqslant r)$逼近矩阵$\boldsymbol{A}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}$，$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_k\|_2=\sigma_{k+1}$。

定理 4　设矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，对$k=1,\cdots,\min\{m,n\}$，有$\sigma_k(\boldsymbol{A})=\min\limits_{\dim(\boldsymbol{L})=n-k+1}\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}}\dfrac{|\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|}{\|\boldsymbol{y}\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2}=\max\limits_{\dim(\boldsymbol{L})=k}\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}}\dfrac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$。式中，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^m$，$\boldsymbol{L}$为$\mathbb{C}^n$中的子空间。

3.3　截断奇异值分解

在虚拟域谱方法中，为确定人工边界条件，在虚拟边界上选取若干采样点，构建最小二乘系统。采样点间距较小时，系统矩阵$\boldsymbol{A}$的相邻行近似线性相关，矩阵条件数过大，系统会呈现严重病态性。若直接使用传统最小二乘法求解，数值误差将被放大，解失去物理意义。因此，引入 TSVD 技术。

令$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，其中，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$为正交矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\delta_i)$。代入目标函数得$\left\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}t-(\boldsymbol{G}\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}\right\|^2$。由于正交变换保持$L^2$范数，左乘$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$得到等价形式$\left\|\Sigma(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}\right\|^2$。

设新变量$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}$，$d=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}$，上式可化为$\|\boldsymbol{\Sigma}y-d\|^2$。原问题转化为标准对角矩阵上的最小二乘问题，其解析解为$y_i=\dfrac{d_i}{\sigma_i}$，$\sigma_i\neq 0$。如存在奇异值趋近于 0 的情况，为避免病态放大误差，进行截断，由此解出人工边界条件$\min\limits_{y}\|\boldsymbol{\Sigma}y-d\|^2$。即根据系统 (10)，数值解可表示为

$$U_{\mathrm{num}}(r,\theta)=\sum_{m=0}^{M}\Big[\big(\psi_m^{(c)}(r)+t_m^{(c)}\phi_m(r)\big)\cos(m\theta)+\big(\psi_m^{(s)}(r)+t_m^{(s)}\phi_m(r)\big)\sin(m\theta)\Big]\tag{14}$$

具体而言，对系统矩阵$\boldsymbol{A}$进行 SVD，得到$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$。通过设定一个截断阈值$\tau>0$，仅保留大于$\tau$的奇异值及其对应的奇异向量，其余部分置 0。由此得到截断后的近似解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}_\tau^{+}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，其中，$\boldsymbol{\Sigma}_\tau^{+}$为截断后的伪逆矩阵[14]。该操作实质上过滤掉了小奇异值对应的噪声模式，有效抑制病态系统中解的振荡与发散行为。与基于基函数缩放来改善条件数的方法相比，TSVD 提供了一种自适应的数值稳定机制，根据系统矩阵的奇异值分布灵活调整截断策略，在不损失主要特征信息的前提下，显著提升解的可靠性。

4　非线性微分方程

基于上文奠定的基础，将数值方法扩展应用于以下非线性微分方程：

$$\begin{cases}\widehat{\alpha}V^2(x,y)-\widehat{\beta}\Delta V(x,y)=F(x,y),\ (x,y)\in\Omega\\ V(x,y)=G(x,y),\ (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}\tag{15}$$

式中，$\widehat{\alpha}>0$，$\widehat{\beta}>0$。针对方程中的非线性项，将此项移到等号右边，通过采用 Picard 迭代法进行线性化处理。在每一次迭代步中，利用伪谱法在物理空间进行高效计算。在此基础上，结合虚拟域法和 TSVD，通过在迭代过程中截断小奇异值分量，有效抑制了由虚拟域延拓及数值舍入误差引起的不稳定性，从而在保证非线性迭代收敛的同时，实现了复杂几何区域上数值解的高精度稳健计算。

根据上述数值方法，二维问题转化为一维径向常微分方程：$-\dfrac{\widehat{\beta}}{r}\partial_r(r\partial_r u_m)+\dfrac{\widehat{\beta}m^2}{r^2}u_m=\widehat{f_m}(r)$。其中，记$\widehat{f_m}(r)=f_m(r)-\widehat{\alpha}u_m^2(r)$，$u^2(r,\theta)=\sum\limits_{|m|=0}^{M}u_m^2(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$。

对于$\forall m$，可以得到$\phi_m(r)=r^{|m|}$，且弱形式改写成$\widehat{\beta}\left((u_m^N)',(v_m^N)'\right)_{\hat{\omega}_{0,1}}+\widehat{\beta}m^2(u_m^N,v_m^N)_{\hat{\omega}_{0,-1}}=(I_N\widehat{f_m},v_m^N)_{\hat{\omega}_{0,1}}$，最终求解数值解式 (14)。

5 数值实验

为检验本文算法的数值性能，针对方程 (1)、(15) 给出以下数值算例。在网格节点处离散的L^2与L^∞误差定义如下：

$$E_{L^2(\Omega)}:=\left[\frac{\sum_{i=1}^{K_r}\sum_{j=1}^{K_\theta}\left(U(r_i,\theta_j)-u(r_i,\theta_j)\right)^2}{\sum_{i=1}^{K_r}\sum_{j=1}^{K_\theta}u(r_i,\theta_j)^2}\right]^{1/2}$$

$$E_{L^\infty(\Omega)}:=\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant K_r,1\leqslant j\leqslant K_\theta}|U(r_i,\theta_j)-u(r_i,\theta_j)|}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant K_r,1\leqslant j\leqslant K_\theta}|u(r_i,\theta_j)|}$$

例 1 取式 (1) 中的$\alpha=10$、$\beta=1$，并令精确解为$U(x,y)=\exp\left(\frac{y}{x+2}\right)$，其中，计算区域为一个复杂区域：$\Omega=\{(r,\theta):\ r<0.7+0.2\sin(3\theta)\}$。

例 1 所选函数具有解析性强、在区域边界处变化平滑的特征，适合用于验证算法在非规则光滑域下的收敛性与稳定性表现。该函数在x方向呈指数衰减，在y方向具有渐进平滑性，可有效考察算法在有几何扰动与非线性边界条件时的数值鲁棒性。由图 1 可知，所得数值解较好地逼近解析解，总体分布趋势正确。误差收敛曲线图中，当傅里叶模数M较小时，L^2与L^∞误差存在明显波动，误差达到最低点后随M增加，呈轻微上升趋势。单纯依靠基函数缩放数值会受到病态性影响，系统中小奇异值的放大导致了数值不稳定。

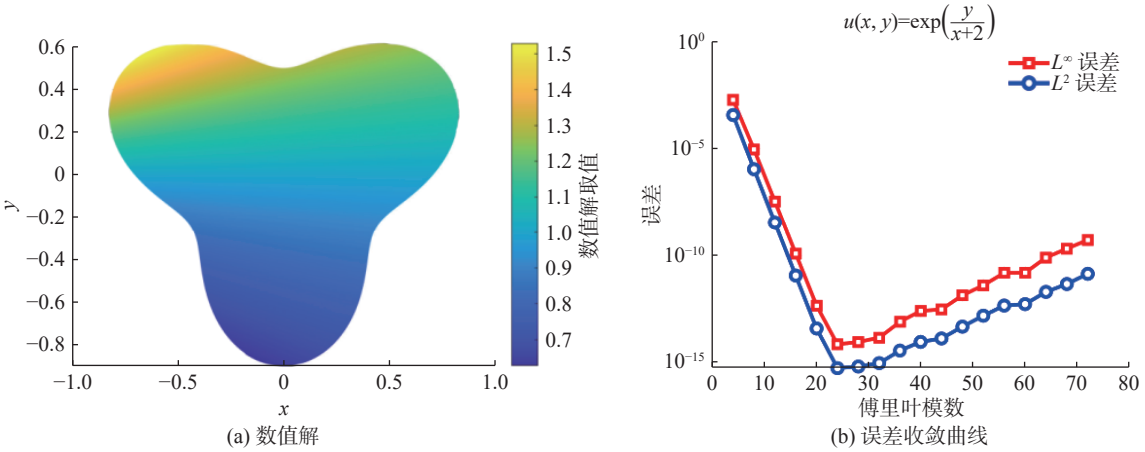
相比之下，图 2 所示的基于 TSVD 的方案有效抑制了不良条件数对误差传播的影响，使得误差曲线在高维情况下保持稳定，且收敛速度更快。从图中可见，TSVD 在$M>20$之后误差迅速趋于饱和，并在整个区间内保持低误差水平，数值稳定性明显优于基函数缩放法。

例 2 取式 (1) 中的$\alpha=1$，$\beta=1$，并令精确解为$U(x,y)=\cos\left(10x^2-9y^2+2\right)$，其中，计算区域为一个复杂区域：$\Omega=\left\{(r,\theta):\ r<\frac{17}{15}+\frac{1}{5}\sin(5\theta)\right\}$。

例 2 所选函数在x与y方向上均呈现高频振荡特征，能够模拟包含局部快速变化与奇异摄动特征的复杂场景，可有效考察方法在高频解及非规则域内的适应性，是对第一个示例中平滑解测试的有益补充。计算区域具有周期扰动的光滑域，用以进一步检验算法在复杂几何边界下的稳定性与精度表现。

由图 3 可知，所得数值解能够较好地反映解析解的主要分布特征，但随着M的增加，误差收敛呈现轻微波动。在中等网格密度范围内，误差下降速度较快，而当$M>60$后下降趋势趋缓，说明该方法在处理高频震荡解时，仍受到一定的病态影响。

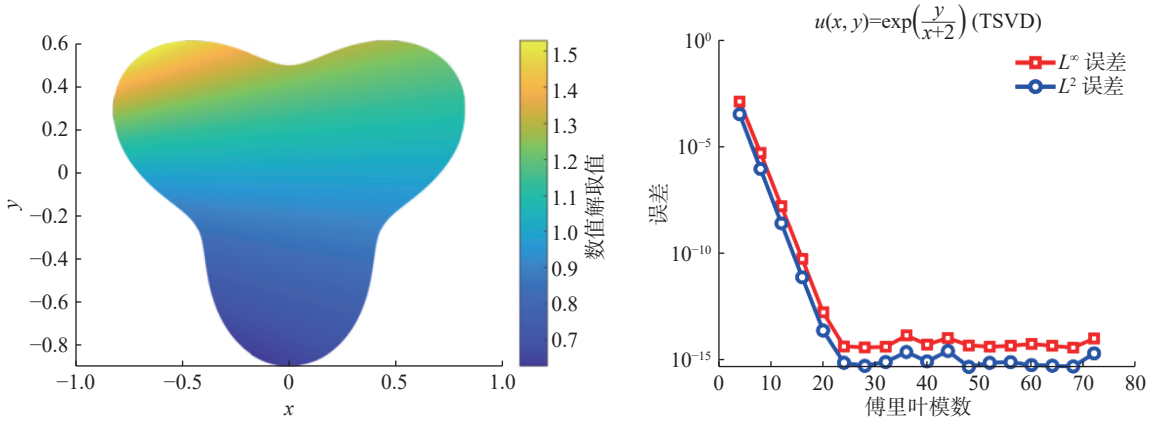
相较之下，图 4 展示的基于 TSVD 计算得到的数值结果表现出更优的收敛性与鲁棒性。误差随M增加呈近似指数级衰减，并在$M>80$时趋于稳定，与理论预期完全一致。TSVD 对高频震荡解的抑制作用显著，能够有效削弱小奇异值放大的不利影响，使误差曲线在整个计算区间内保持平滑且低水平波动。



(a) 数值解　(b) 误差收敛曲线

图 1　例 1 基于基函数缩放的数值解和误差收敛曲线

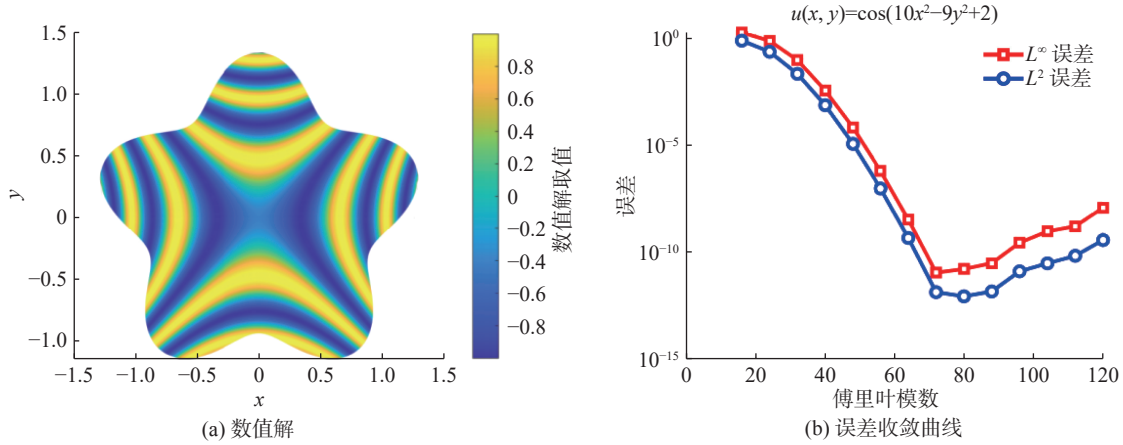
Fig. 1　Numerical solutions and error convergence curves for example 1 based on basis function scaling



(a) 数值解　　(b) 误差收敛曲线

图 2　例 1 基于 TSVD 的数值解和误差收敛曲线

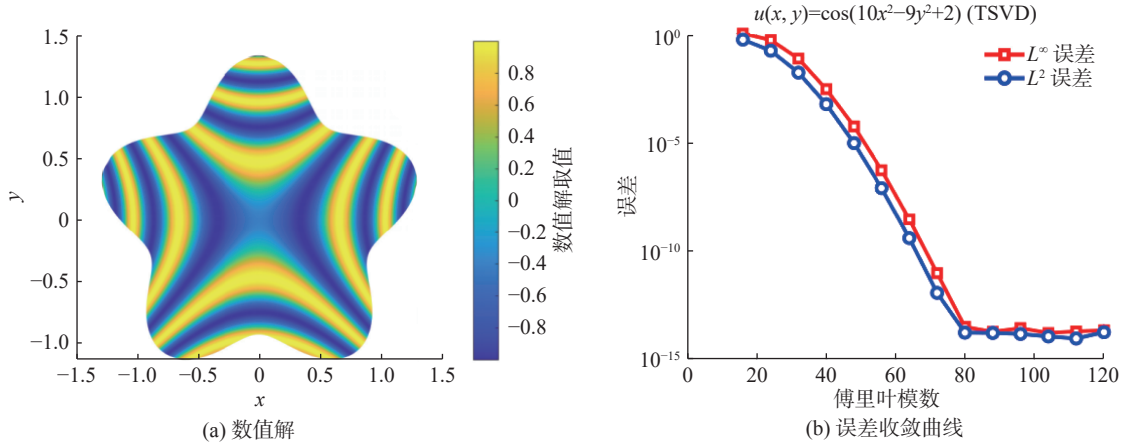
Fig. 2　Numerical solutions and error convergence curves for example 1 based on TVSD



(a) 数值解　　(b) 误差收敛曲线

图 3　例 2 基于基函数缩放的数值解和误差收敛曲线

Fig. 3　Numerical solutions and error convergence curves for example 2 based on basis function scaling



(a) 数值解　　(b) 误差收敛曲线

图 4　例 2 基于 TSVD 的数值解和误差收敛曲线

Fig. 4　Numerical solutions and error convergence curves for example 2 based on TVSD

例 3　取式 (15) 中的$\widehat{\alpha}=10$，$\widehat{\beta}=5$，并令精确解为$U(x,y)=\exp\left(\dfrac{y}{x+2}\right)$，其中，计算区域为一个复杂区域：$\Omega=\{(r,\theta)\colon r<0.7+0.2\sin(3\theta)\}$。

如图 5(a) 所示，基函数缩放法在处理非线性耦合时，随着M的增加，误差曲线出现震荡，其难以完全克服迭代累积的不稳定性。相比之下，图 5(b) 显示 TSVD 获得了显著更优的收敛结果。非线性方程的线性化过程往往导出高度病态的代

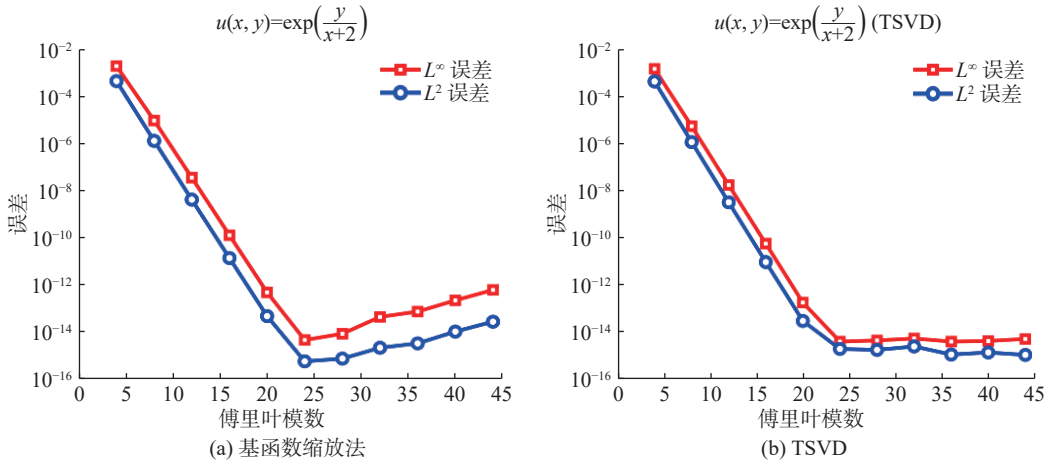


图 5 例 3 中基函数缩放法与 TSVD 的误差收敛性对比

Fig. 5 Comparison of error convergence properties for example 3 between basis function scaling and TSVD

数系统，而 TSVD 通过滤除对应高频噪声的小奇异值分量，有效抑制了由虚拟域及非线性耦合引发的误差放大。结果证实，针对此类非线性问题，TSVD 具备优于基函数缩放法的数值稳定性。

6 结 论

在处理边界条件的最小二乘问题时，直接使用标准傅里叶基函数会导致严重的病态线性系统。为解决该问题，提出采用了缩放傅里叶基，从而显著降低系统的条件数，提高数值稳定性。在此基础上，进一步提出了在最小二乘法上结合 TSVD 对线性系统进行改进。该方法通过舍弃微小奇异值有效抑制了病态矩阵中小奇异值引起的解的不稳定性，在维持精度的同时提升了解的鲁棒性。相较于基函数缩放改善条件数，TSVD 通过直接控制截断阈值，确保了高条件数系统下的数值稳定性。整体而言，在复杂几何区域与高频扰动场景下，该方法展现出优异的稳定性，验证了算法的稳健性与应用价值。

参考文献：

[1] Tadmor E. A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2012, 49(4): 507−554.

[2] Abbassi P K, Fathy M, Elbarkoki R A, et al. Numerical solution of nonlinear partial differential equations using shifted Legendre collocation method[J]. Boundary Value Problems, 2024, 2024(1): 140.

[3] Glowinski R, Pan T W, Periaux J, et al. A fictitious domain method for the incompressible Navier-Stokes equations[M]//Oñate E, Periaux J, Samuelsson A. The Finite Element Method in the 1990's. Heidelberg: Springer, 1991: 410–417.

[4] Droniou J, Lamichhane B P. Gradient schemes for linear and non-linear elasticity equations[J]. Numerische Mathematik, 2015, 129(2): 251−277.

[5] Wang Y X, Tu H W, Xu G J, et al. A review of the application of spectral methods in computational ocean acoustics[J]. Physics of Fluids, 2023, 35(12): 121301.

[6] Hafez R M, Youssri Y H. Review on Jacobi-Galerkin spectral method for linear PDEs in applied mathematics[J]. Contemporary Mathematics, 2024, 5(2): 2051−2088.

[7] Babuška I. The finite element method with Lagrangian multipliers[J]. Numerische Mathematik, 1973, 20(3): 179−192.

[8] Gu Y Q, Shen J. An efficient spectral method for elliptic PDEs in complex domains with circular embedding[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2021, 43(1): A309−A329.

[9] Yao G Q, Wen X, Wang Z Q. Efficient spectral methods for PDEs in three-dimensional curved geometries[J]. Journal of Scientific Computing, 2025, 103: 95.

[10] Gu Y Q, Shen J. A fictitious domain spectral method for solving the Helmholtz equation in exterior domains[J]. Journal of Scientific Computing, 2023, 94: 46.

[11] Hofmann B, Mathé P. Tikhonov regularization with oversmoothing penalty for non-linear ill-posed problems in Hilbert scales[J]. Inverse Problems, 2018, 34(1): 015007.

[12] Hansen P C. Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1990, 11(3): 503−518.

[13] Xu P L. Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems[J]. Geophysical Journal International, 1998, 135(2): 505−514.

[14] Zhu X J, Shen J, Liu W, et al. Nonnegative least-squares truncated singular value decomposition to particle size distribution inversion from dynamic light scattering data[J]. Applied Optics, 2010, 49(34): 6591−6596.

（编辑：丁红艺）